DRAFT

Lógica III

Cezar Mortari
Departamento de Filosofia
UFSC

2011

Sumário

Apresentação

A disciplina de Lógica III, para a qual o presente texto foi escrito, tem como ementa "tópicos de lógica contemporânea". Ora, se pensarmos nos mais de dois mil anos de história da lógica, veremos que o que mais caracteriza o estado da lógica contemporânea é a existência de uma infinidade de sistemas de lógica, tanto estendendo a lógica clássica, quanto rivalizando com ela — ou até as duas coisas ao mesmo tempo. São as chamadas "lógicas não clássicas". O desenvolvimento da informatização também propiciou o surgimento de inúmeras aplicações computacionais das lógicas, para além do quadro usual de lógica como ferramenta para a análise de argumentos.

Sendo assim, o enfoque central deste texto será o do exame de algumas dessas lógicas não clássicas, bem como de questões filosóficas que motivaram seu surgimento, e que esse surgimento suscitou. Evidentemente, para discutir questões filosóficas suscitadas por certo sistema de lógica precisamos também ter conhecimento da parte técnica — como tal sistema é constituído, e assim por diante.

Para tanto, iniciaremos fazendo uma revisão da lógica clássica, ou parte dela (o *cálculo proposicional*), que já deve ser sua conhecida e, ao mesmo tempo, faremos alguns comentários gerais sobre o que é uma lógica.

Capítulos posteriores tratarão de alguns sistemas específicos de lógica não clássica, como lógicas do tempo e lógicas polivalentes, discutindo suas motivações filosóficas. Um capítulo final discutirá algumas questões filosóficas a respeito dessa diversidade de sistemas de lógica.

Pré-requisito para leitura deste texto é que você tenha feito com sucesso algum curso de lógica (como as disciplinas Lógica I e II) e esteja bem familiarizado com o material que lá foi tratado.

Capítulo 1

Lógica clássica

Neste capítulo faremos uma apresentação bastante rápida da lógica clássica — ou parte dela, mais especificamente, o cálculo proposicional clássico (**CPC**). Discutiremos também alguns questões básicas, como o que é uma lógica e quais são os objetivos da formalização. O objetivo maior deste capítulo é relembrar algumas noções que você viu nas disciplinas de Lógica I e Lógica II, mas também serão introduzidos alguns conceitos novos que serão mais adiante necessários.

1.1 O que é uma lógica?

No decorrer deste livro, teremos ocasião de examinar alguns sistemas de lógica, ou lógicas. Agora, se estamos falando no plural, de *várias* lógicas — e entendendo com isso que sejam *diferentes* —, o que faz com que alguma coisa seja uma lógica? Que passos tomamos para identificar uma teoria formal como uma lógica? O que têm em comum as várias lógicas; o que faz com que sejam *lógicas* e não outra coisa?

Você recorda ter visto, nas disciplinas introdutórias, uma primeira teoria lógica, a chamada *lógica elementar*, ou *cálculo de predicados de primeira ordem (com identidade e funções)*.[1] E você viu que uma tal teoria é apresentada como um *sistema formal*: temos, primeiro, a especificação de uma *linguagem artificial* (uma linguagem formal); em seguida, uma *interpretação* para essa linguagem e, finalmente, define-se uma noção de *consequência* para as fórmulas da linguagem especificada. Uma questão interessante associada a isso é saber se a teoria lógica resultante é *decidível*, ou seja, se podemos sempre obter uma resposta (positiva ou negativa) para a questão de se alguma coisa é ou não consequência lógica de outras.

[1]Ver, por exemplo, o livro *Introdução à lógica* (Mortari 2001), utilizado nas disciplinas Lógica I e Lógica II.

Essa é justamente a motivação inicial para um sistema de lógica: a noção de *implicação* ou *consequência lógica*, a noção de que certas coisas seguem-se de outras por necessidade. Em outras palavras, dado que certas afirmações são verdadeiras, então outras também o são.

Considere, por exemplo, as três sentenças a seguir:

Todo gato voa.
Miau não voa.
$\therefore$ Miau não é um gato.

Supondo que as duas primeiras sejam verdadeiras, não poderíamos inferir que a terceira também é?

Esse conjunto de três afirmações é denominado um *argumento*, que pode ser brevemente definido como um conjunto não vazio e (geralmente) finito de sentenças, das quais uma é denominada a *conclusão* do argumento, as demais são as *premissas*, e pretende-se que a conclusão decorra das premissas, ou que as premissas justifiquem a conclusão. (Em vez de falar de *sentenças*, é claro, podemos falar também de *proposições* ou de *enunciados*; ver o cap. 1 da *Introdução à lógica*.)

Repetindo, o conjunto de sentenças apresentado acima constitui um argumento. A conclusão está identificada pelo símbolo '$\therefore$', um sinal costumeiramente usado para marcar a conclusão de um argumento. As outras duas sentenças são as premissas.

Dado um argumento, coloca-se a questão de se ele é *válido* (de um ponto de vista lógico) ou não. Costuma-se dizer que um argumento é válido se suas premissas *implicam* sua conclusão, ou se sua conclusão for *consequência lógica* de suas premissas — e inválido em caso contrário. Mas o que é preciso para que uma sentença seja consequência lógica de outras?

Intuitivamente, diríamos, é preciso que, em qualquer circunstância em que as premissas sejam verdadeiras, a conclusão também o seja. Dito de outra maneira: não é possível haver qualquer situação em que as premissas do argumento sejam verdadeiras e em que sua conclusão seja falsa. A verdade das premissas implica a verdade da conclusão.

No exemplo acima, temos certeza de que o argumento apresentado é válido, de que a conclusão é mesmo consequência lógica das premissas. Mas o que nos garante isso? O que nos dá essa certeza? Note que sabemos que *não é verdade* que os gatos voam. O ponto é que, se *fosse* verdade que os gatos voam, e que Miau não voa, então *seria* verdade que Miau não é um gato. Não é possível que Miau fosse um gato e não voasse, se fosse verdade que todo gato voa.

Você certamente ouviu falar que a validade de um argumento é uma questão de sua *forma*, e não de seu *conteúdo*. Em outras palavras, podemos dizer que um argumento é válido se for uma instância — um caso particular — de uma forma válida de argumento. Mas o que é exatamente essa forma de um argumento? Os sistemas lógicos procuram explicitar isso através de linguagens artificiais, em que as palavras do português são substituídas por certos símbolos. A forma é representada por meio de fórmulas. Do argumento apresentado acima resultaria, usando as linguagens de primeira ordem que você conhece, um conjunto de fórmulas como o seguinte (em que m: Miau; F: x voa; G: x é um gato):

$\forall x(Gx \to Fx)$
$\neg Fm$
$\therefore\ \neg Gm$

Note que nesse caso abstraímos do conteúdo de 'gato', 'voa' etc. para ter apenas certas letras representando predicados. E se em todas as interpretações dos símbolos G, F e m em que as premissas forem verdadeiras a conclusão também for, dizemos que $\neg Gm$ se segue das outras duas fórmulas.

Por exemplo, se G representasse o predicado 'x é gaúcho', F representasse 'x é florianopolitano', e 'm' fosse um nome para Maria, teríamos o argumento a seguir:

Todo gaúcho é florianopolitano.
Maria não é florianopolitana.
∴ Maria não é gaúcha.

O que há em comum entre os dois argumentos é justamente sua forma, dada pelas fórmulas anteriormente listadas. Não importa a que predicados associemos as letras G e F, e a que indivíduo associemos a constante m, o argumento resultante é válido.

Mas por que mudamos apenas a interpretação de certos símbolos (G, F e m) mas não de outros, como $\forall$, $\neg$ e $\to$? Como você deve recordar, é porque $\forall$, $\neg$ e $\to$ são denominados *símbolos lógicos*, ao contrário de G, F e m que são *símbolos não lógicos*. Muito bem — contudo, cabe então aqui a pergunta: como sabemos se algo é um símbolo lógico ou não?

Não há uma resposta clara para isso. Se tivermos diferentes conjuntos de símbolos lógicos, poderemos ter diferentes lógicas. Ninguém teria dificuldade em dizer que o argumento a seguir é válido:

João é mais velho que Maria.
∴ Maria é mais jovem que João.

Mas de fato não há uma lógica do 'mais velho'/'mais jovem'. Talvez porque esses termos não tenham generalidade suficiente, ao contrário de 'todo' ou 'não'. Estas duas últimas palavras podem ser usadas em argumentos sobre qualquer assunto, o que corresponde à noção que temos da aplicabilidade da lógica; 'mais velho' e 'mais jovem', no entanto, são expressões cujo uso parece ser restrito a pessoas.

Note que se $\forall$, por exemplo, não fosse considerado um símbolo lógico, se permitíssemos que $\forall$ mudasse de significado — digamos que passasse a significar 'algum' em vez de 'todo' —, o argumento deixaria de ser válido. A forma anterior estaria, na verdade, representando um argumento intuitivamente inválido como:

> Algum gato voa.
> Miau não voa.
> $\therefore$ Miau não é um gato.

A validade fica garantida somente se restringirmos as reinterpretações aos *termos não lógicos* que ocorrem no argumento.

Assim, para resumir o dito acima, se formos criar um sistema de lógica — uma *lógica* — o primeiro passo é escolher um conjunto de termos que serão denominados *termos lógicos* daquela lógica. Por exemplo, o cálculo de predicados de primeira ordem com identidade, que você já conhece, tem a seguinte lista de termos lógicos:

> não, e, ou, se–então, se e somente se, todos, alguns, é idêntico a,

costumeiramente representados pelos símbolos

$$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists, = .$$

Agora, você pode estar se perguntando se a lista acima é completa, ou seja, se inclui todos os termos lógicos que você conhecia. Por exemplo, os argumentos seguinte não seriam também válidos?

Nenhum gato voa.	e	Nem Miau nem Fifi são gatos.
Miau é um gato.		$\therefore$ Miau não é um gato.
$\therefore$ Miau não voa.		

Intuitivamente, diríamos que são válidos. A validade do primeiro depende de considerarmos 'nenhum' um termo lógico, ao passo que a validade do segundo depende de considerarmos 'nem–nem' um termo lógico. Quer dizer que nossa lista é então incompleta?

Na verdade, não. O ponto é que podemos *definir* esses termos em função dos outros. O quantificador 'nenhum' pode ser definido usando-se 'todo' e 'não', da seguinte maneira:[2]

[2]Usamos o sinal '$=_{\mathrm{df}}$' para representar 'pode ser definido como' ou 'é igual por definição a'.

- *nenhum* gato voa $=_{\text{df}}$ *todo* gato *não* voa.

De maneira similar, 'nem–nem' pode ser definido usando-se 'não' e 'e', como segue:

- *nem* Miau *nem* Fifi são gatos $=_{\text{df}}$ Miau *não* é um gato *e* Fifi *não* é um gato.

Para resumir essas considerações iniciais, alguns dos sistemas de lógica não clássica que iremos considerar partem de uma lista diferente de termos lógicos — talvez acrescentando outras coisas à lista, ou talvez tendo listas bem diferentes. Outros terão a mesma lista de termos lógicos — mas entendendo que eles funcionam de uma maneira diferente (veremos depois os detalhes). Em qualquer dos casos, obteremos então outros sistemas formais que também são denominados "lógicas". Mas será que são mesmo lógicas? Ou não passariam de sistemas formais, pois há apenas uma lógica?

Discutiremos essas questões mais ao final do texto, depois de termos examinados alguns exemplos de lógicas não clássicas. Primeiro, porém, uma rápida revisão da lógica clássica — mais precisamente, daquela parte sua denominada *cálculo proposicional clássico*. Isso nos permitirá recordar algumas coisas, fixar uma certa nomenclatura, e ter uma referência para fins de comparação com lógicas não clássicas.

1.2 Lógica clássica

Talvez fosse bom começar lembrando que a lógica clássica não é a mesma coisa que a *lógica tradicional*, com o que estamos nos referindo à teoria do silogismo tal como foi formulada por Aristóteles no século IV a. C. e aperfeiçoada durante a Idade Média. O que entendemos por lógica clássica compreende ao menos o que denominamos *lógica elementar*, ou seja, o cálculo de predicados de primeira ordem com identidade e símbolos funcionais, que foi formulado por Gottlob Frege na segunda metade do século XIX.

A lógica clássica tem algumas propriedades que a caracterizam como tal, por exemplo, a obediência a certos assim chamados princípios lógicos fundamentais, a saber:

Princípio de Identidade: todo objeto é idêntico a si mesmo (ou então: se uma proposição é verdadeira então é verdadeira);

Princípio de Não Contradição: um objeto não pode ter e não ter um certa propriedade ao mesmo tempo e sob o mesmo aspecto (ou ainda: dadas uma proposição e sua negação, pelo menos uma delas é falsa);

Princípio do Terceiro Excluído: um objeto não pode deixar de ter e deixar de não ter uma certa propriedade ao mesmo tempo e sob o mesmo aspecto (ou então: dadas uma proposição e sua negação, pelo menos uma delas é verdadeira);

Princípio de Bivalência: toda proposição é ou verdadeira ou falsa.

Além desses princípios, outras propriedades caracterizam a lógica clássica. Como você talvez recorde, os operadores são funções de verdade (vamos rever isso logo a seguir), o universo das estruturas não pode ser vazio, e assim por diante.

O que faz, então, com que uma lógica seja *não clássica*? Bem, por um lado, ela pode *estender* a lógica clássica, acrescentando coisas de que ela não é capaz de lidar porque não foi desenvolvida para tanto. Por exemplo, tempo (foi, será) e modalidade (podia ser sido, tem que ser). Temos, neste caso, o que se costuma chamar de lógicas *complementares* ou *ampliadas* ou *extraclássicas*.

Por outro lado, uma lógica não clássica pode *rivalizar* com a lógica clássica ao recusar certos princípios ou certas teses desta última. Por exemplo, recusar o princípio de bivalência, ou recusar que uma dupla negação seja equivalente a uma afirmação. Temos, neste caso, o que se costuma chamar de lógicas *alternativas* ou *heterodoxas* ou *anticlássicas*.

Lógicas não clássicas surgiram praticamente ao mesmo tempo que a lógica clássica. Já Aristóteles tinha procurado estender sua teoria do silogismo com uma teoria dos silogismos modais, ou seja, aqueles que envolvem termos como 'necessariamente' e 'possivelmente'. Mas isso não deu muito certo, e as lógicas modais foram surgir apenas nas primeiras décadas do século XX — o mesmo tendo acontecido com outros sistemas de lógica não clássica, a partir de diferentes motivações.

Antes de entrarmos mais em detalhes sobre lógicas não clássicas, porém, recordemos como se apresenta um sistema de lógica, tomando como exemplo o o *cálculo proposicional clássico*, abreviadamente: **CPC**.

1.3 Sintaxe do CPC

Como vimos acima, para apresentar um sistema de lógica começamos por especificar sua linguagem. No caso do cálculo proposicional clássico, o tipo de linguagem que teremos é uma *linguagem proposicional* — algo mais simples que as linguagens de primeira ordem com as quais você estava acostumado.

A caracterização a seguir é bastante geral, e vai nos servir não apenas para o **CPC**, mas também para outros sistemas não clássicos de lógica proposicional que vamos examinar neste livro.

Uma *linguagem proposicional* consiste no seguinte:

(i) um conjunto VAR de variáveis proposicionais (também chamadas letras sentenciais);
(ii) um conjunto OP de operadores (ou conectivos);
(iii) sinais de pontuação.

Com respeito a (i), o conjunto VAR pode ser finito ou infinito; isso vai depender das aplicações que temos em mente. Para simplificar, teremos aqui um conjunto enumerável[3] de variáveis proposicionais, para as quais usaremos as letras p, q, r etc., com ou sem subscritos (números naturais positivos). Ou seja, nosso conjunto VAR de variáveis incluirá expressões como:

$$p, q, r, s, p_1, q_2, p_{23}, q_{95}, s_{200}, \ldots$$

Os elementos do conjunto OP, os operadores, têm associados a eles um número natural n que indica seu *grau*. Assim, poderemos ter operadores que são unários (de grau 1), binários (de grau 2), ternários (de grau 3) etc. Dos operadores clássicos que você certamente conhece, a *negação* é unário, e a *conjunção*, por exemplo, binário. Isso significa que uma negação aplica-se a uma fórmula, para gerar uma fórmula mais complexa. Operadores de grau maior do que 2 não são tão usuais nos textos de lógica, mas nada impede que os tenhamos. (Por exemplo, poderíamos ter uma conjunção ternária, se quiséssemos, correspondendo ao português 'p e q e r'.)

Nosso conjunto de operadores primitivos será, para o **CPC**, o seguinte:

$$\text{OP} = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\},$$

respectivamente, os operadores de *negação*, *conjunção*, *disjunção*, *implicação* e *equivalência* (ou bi-implicação). Como você deve recordar, o operador de negação é unário (ou de grau 1) ao passo que os demais são binários (ou de grau 2).

Finalmente, usaremos parênteses, (e), como sinais de pontuação.

Dados os símbolos da linguagem, é o caso agora de definir as expressões bem formadas. No caso de uma lógica proposicional, isso resume-se a dizer quais são as *fórmulas* da linguagem. A definição a seguir é bem geral, e será aplicada à linguagem de todas as lógicas proposicionais que investigaremos neste livro.

Definição 1.1. Uma *fórmula* (de uma linguagem proposicional) é uma expressão que pode ser obtida através das seguintes regras:

[3] Você dever recordar que um conjunto enumerável tem a mesma cardinalidade (número de elementos) que o conjunto dos números naturais. Para detalhes, ver o cap. 4 da *Introdução à lógica*.

(a) variáveis proposicionais isoladas são fórmulas;
(b) se α é uma fórmula, e $\star$ é um operador unário, $\star\alpha$ é uma fórmula;
(c) se α e β são fórmulas, e $\star$ é um operador binário, $(\alpha \star \beta)$ é uma fórmula;
(d) nada mais é uma fórmula.

Note que a definição não se refere explicitamente a nenhum dos operadores clássicos, como $\neg$ ou $\wedge$, mas é claro que se aplica a eles. $\neg$ é um operador unário, portanto, se α é uma fórmula, $\neg\alpha$ também. Igualmente, $\vee$ é um operador binário: assim, se α e β são fórmulas, $(\alpha\vee\beta)$ também é. Em capítulos posteriores veremos outros exemplos de operadores unários e binários.

Vamos denotar por $\text{FOR}_{\mathscr{L}}$ o conjunto de todas as fórmulas de uma linguagem proposicional $\mathscr{L}$. Se a linguagem estiver clara pelo contexto, escreveremos simplesmente FOR.

Adotaremos a convenção de eliminação de parênteses da *Introdução à lógica*, ou seja, os parênteses externos de uma fórmula podem ser eliminados. Assim, em vez de escrevermos

$$(\neg(p \vee q) \to (\neg q \leftrightarrow r)),$$

escreveremos simplesmente

$$\neg(p \vee q) \to (\neg q \leftrightarrow r).$$

Os parênteses externos serão os únicos que eliminaremos; todos os demais devem permanecer.

Dispondo de uma linguagem formal $\mathscr{L}$ bem definida, podemos agora representar argumentos formulados em português por meio de fórmulas dessa linguagem — o que costumamos chamar de “formalizar o argumento”. Para tanto, é claro que precisamos de uma correspondência entre expressões do português e fórmulas de $\mathscr{L}$. As variáveis proposicionais são usadas para representar sentenças (ou proposições) simples, tais como:

p: Platão é um filósofo,
q: Sócrates é um filósofo,
r: Sócrates é o mestre de Platão.

E em segundo lugar, precisamos especificar a que expressões do português correspondem nossos operadores. As mais usuais você encontra relacionadas abaixo:

$\neg p$	não p
	não é verdade que p
	é falso que p

	não é o caso que p
$p \wedge q$	p e q
	p, mas q
	tanto p quanto q
$p \vee q$	p ou q
	ou p ou q
	p e/ou q
$p \rightarrow q$	se p então q
	se p, q
	p somente se q
	q, se p
$p \leftrightarrow q$	p se e somente se q
	p é equivalente a q

Para recordar o uso dos operadores, procure fazer o exercício abaixo.

Exercício 1.1. Represente as as sentenças abaixo por fórmulas da linguagem $\mathscr{L}$, com a chave de tradução a seguir:

p: Platão é um filósofo,
q: Sócrates é um filósofo,
r: Sócrates é o mestre de Platão,
s: Platão é mais jovem que Sócrates.

(a) Platão não é um filósofo.
(b) Platão é um filósofo, mas Sócrates não é.
(c) Se Platão é um filósofo, então Sócrates também é.
(d) Platão é um filósofo, se Sócrates também é.
(e) Platão é um filósofo somente se ele é mais jovem do que Sócrates.
(f) Platão é um filósofo se e somente se Sócrates for o mestre de Platão.
(g) Nem Platão nem Sócrates são filósofos.
(h) Não é o caso que Platão ou Sócrates são filósofos.
(i) Ou Platão é um filósofo ou é mais jovem do que Sócrates.
(j) Platão não é mais jovem do que Sócrates, se Sócrates é o mestre de Platão.
(k) Se Sócrates e Platão são filósofos, então Sócrates é o mestre de Platão.
(l) Não é verdade que Platão seja mais jovem do que Sócrates, nem que Sócrates seja o mestre de Platão.
(m) Platão não é um filósofo, mas é mais jovem do que Sócrates se Sócrates for seu mestre.
(n) Sócrates não é o mestre de Platão se e somente se Platão não for mais jovem do que Sócrates.

1.4 Semântica para o CPC

Na semântica vemos como interpretar as fórmulas de uma linguagem lógica: isso consiste em atribuir um *significado* aos símbolos não lógicos de tal linguagem. No caso de uma linguagem proposicional, nossos símbolos não lógicos são justamente as variáveis proposicionais. Assim, uma interpretação vai associar a cada uma delas um significado.

Mas que significado? Você deve recordar que a semântica para sistemas de lógica clássica é uma semântica extensional, ou seja, a cada símbolo não lógico é associada uma *extensão*. No caso de sentenças, tal extensão é simplesmente um *valor de verdade*. (Recorde que a semântica que estamos fazendo para uma linguagem lógica é uma *semântica formal*.)

A lógica clássica aceita o princípio da bivalência, ou seja, há dois valores de verdade, o verdadeiro e o falso, que representaremos aqui por **V** e **F**, respectivamente, e cada proposição toma um e só um desses valores. Assim, uma interpretação para uma linguagem proposicional $\mathscr{L}$ — vamos chamá-la de uma *valoração* — vai atribuir a cada variável proposicional de $\mathscr{L}$ um desses valores. Ou seja:

Definição 1.2. Uma *valoração* V é uma função de VAR no conjunto $\{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$ de valores de verdade.

A partir daí podemos associar um valor de verdade a cada uma das fórmulas de $\mathscr{L}$. Uma fórmulas atômica recebe esse valor imediatamente, e fórmulas moleculares têm seu valor (em uma valoração) calculado a partir dos valores das fórmulas atômicas usando-se as seguinte tabelas:

α	$\neg\alpha$
V	**F**
F	**V**

α	β	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \vee \beta$	$\alpha \to \beta$	$\alpha \leftrightarrow \beta$
V	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**
F	**V**	**F**	**V**	**V**	**F**
V	**F**	**F**	**V**	**F**	**F**
F	**F**	**F**	**F**	**V**	**V**

Em outras palavras, dada uma valoração V, podemos estendê-la a uma função que dá um valor a todas as fórmulas de $\mathscr{L}$ — a qual continuaremos, por abuso de linguagem, a chamar de V. É fácil ver que as seguintes condições valem (sendo V uma valoração qualquer):

(a) $V(\neg\alpha) = \mathbf{V}$ sse $V(\alpha) = \mathbf{F}$;
(b) $V(\alpha \wedge \beta) = \mathbf{V}$ sse $V(\alpha) = \mathbf{V}$ e $V(\beta) = \mathbf{V}$;
(c) $V(\alpha \vee \beta) = \mathbf{V}$ sse $V(\alpha) = \mathbf{V}$ ou $V(\beta) = \mathbf{V}$;
(d) $V(\alpha \to \beta) = \mathbf{V}$ sse $V(\alpha) = \mathbf{F}$ ou $V(\beta) = \mathbf{V}$;
(e) $V(\alpha \leftrightarrow \beta) = \mathbf{V}$ sse $V(\alpha) = V(\beta)$.

Essas condições de verdade refletem, se você examinar bem, o que está dito nas tabelas dos operadores. Por exemplo, pela cláusula (b) uma conjunção é verdadeira se e somente se ambos os elementos da conjunção o forem. É o que diz a tabela acima apresentada. E assim por diante.

Uma questão interessante é até que ponto os operadores de nossas linguagens formais capturam o sentido de seus correspondentes em português. Qual a relação entre o 'e' do português e o operador $\wedge$? Note que o operador $\wedge$ é comutativo: as fórmulas $p \wedge q$ e $q \wedge p$ são logicamente equivalentes (qualquer seja a valoração V, ela serão ambas verdadeiras ou ambas falsas em V). Mas parece que o 'e' em português não é sempre comutativo, como ilustra o exemplo a seguir:

> João pulou do edifício e morreu.
> João morreu e pulou do edifício.

Em certos casos então, a ordem das sentenças importa. Mas isso pode não fazer parte das propriedades *lógicas* do operador, sendo talvez mais uma questão de pragmática (isto é, do uso da linguagem): a ordem em que as sentenças são pronunciadas indica a ordem em que os eventos ocorreram. Note ainda que, não importa a ordem em que apresentemos as sentenças, se é verdade que João pulou do edifício e morreu, então é verdade que: (i) João morreu e (ii) João pulou do edifício. E isso é capturado por nosso operador $\wedge$.

Algumas fórmulas, como você recorda, são verdadeiras em todas as valorações. Estas são as *fórmulas válidas* de uma lógica. No caso do **CPC**, elas são chamadas de *tautologias*. Outras fórmulas são falsas em todas as valorações, as *contradições*. As que são verdadeiras em ao menos uma valoração, e falsas em ao menos uma — ou seja, que não são nem tautologias nem contradições — damos o nome de *contingências*.

Além da definição de validade, temos uma definição de consequência lógica. No caso do **CPC**, isso também é chamado de *consequência tautológica*. A definição a seguir resume isso tudo.

Definição 1.3.

(a) Uma fórmula α é *válida* (ou, no caso proposicional, uma *tautologia*), o que indicamos por $\vDash \alpha$, se para toda valoração V, $V(\alpha) = \mathbf{V}$.
(b) α é uma *contradição* se, para toda valoração V, $V(\alpha) = \mathbf{F}$.
(c) α é uma *contingência* se não for nem tautologia nem contradição.
(d) Uma valoração V é *modelo* de um conjunto de fórmulas Γ, o que indicamos por $V \vDash \Gamma$, se, para toda $\gamma \in \Gamma$, $V(\gamma) = \mathbf{V}$.
(e) Uma fórmula α é *conseqüência lógica* de um conjunto de fórmulas Γ, o que indicamos por $\Gamma \vDash \alpha$, se para toda valoração V tal que $V \vDash \Gamma$, $V(\alpha) = \mathbf{V}$.

(f) Duas fórmulas α e β são *logicamente equivalentes* se e somente se, para toda valoração V, $V(\alpha) = V(\beta)$.

Com essas definições, obtemos a noção de implicação ou consequência lógica desejada para caracterizar a validade de argumentos. Um argumento será válido se puder ser traduzido para um conjunto de fórmulas em que uma certa fórmula (a conclusão) é consequência lógica das demais (as premissas). Ou seja: digamos que temos um argumento $P_1, P_2, \ldots, P_n, C$ consistindo em n premissas e uma conclusão. Suponhamos agora que a cada premissa P_i corresponde uma fórmula α_i de $\mathscr{L}$, e à conclusão corresponde uma fórmula β de $\mathscr{L}$. Dizemos então que:

$$P_1, P_2, \ldots, P_n \therefore C \text{ é um argumento válido} \quad \text{sse} \quad \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \vDash \beta,$$

ou seja, o argumento é válido se, e somente se, β for consequência lógica do conjunto $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$.

Em termos de métodos para determinar se uma fórmula é ou não uma tautologia, se uma fórmula é ou não consequência lógica de outras, você deve recordar das *tabelas de verdade* (e se não, confira mais uma vez o cap. 9 da *Introdução à lógica*). Tabelas de verdade são um procedimento mecânico, efetivo, que constituem um método de decisão para o **CPC**. Ou seja, o **CPC** é um sistema lógico decidível. (O que não acontece, como você certamente recorda, com o cálculo de predicados de primeira ordem, cf.*Introdução à lógica*, cap. 13.)

Caso você queira, pode refazer os exercícios envolvendo tabelas de verdade que estão no cap. 9 da *Introdução à lógica*. Mas não é necessário.

1.5 O que é uma lógica?

Dadas essas definições, podemos finalmente retornar a uma pergunta que havíamos feito antes: o que é uma lógica? Uma primeira resposta que poderíamos dar é por meio da *relação de consequência* que acabamos de definir.

Um exemplo. Suponhamos que João e Maria sejam os pais de Pedro, mas que não sejam os pais de Carlos. Dizemos então que Pedro está na relação *ser filho de* com João e Maria, ao contrário de Carlos, que não está nessa relação com João e Maria.

Considere agora o conjunto de fórmulas $\{\neg Pa, Pa \vee Qb\}$ e as fórmulas Qb e Rab. É fácil ver que Qa é consequência lógica desse conjunto de fórmulas, mas Rab não. Escrevemos isso assim:

$$\begin{aligned} \neg Pa, Pa \vee Qb &\vDash Qb, \\ \neg Pa, Pa \vee Qb &\nvDash Rab. \end{aligned}$$

É fácil ver porque, se $Pa \vee Qb$ for verdadeira (em alguma valoração V), então ou Pa ou Qb tem que ser verdadeiras em V. Mas se $\neg Pa$ também for verdadeira em V, segue-se que Pa é falsa, de onde concluímos que Qb é verdadeira. Isso significa que Qb está na relação *ser consequência lógica de* com as fórmulas $\neg Pa$ e $Pa \vee Qb$, ao contrário de Rab, que não está (como você também pode facilmente verificar).

A relação $\vDash$, que definimos acima, é um objeto bem definido: uma relação entre *conjuntos de fórmulas* e uma *fórmula*. Poderíamos então dizer, abreviadamente, que é isso o que é o **CPC**: a relação $\vDash$ acima definida.

No caso geral, diríamos, *uma lógica é uma relação de consequência entre conjuntos de fórmulas e uma fórmula*. Obviamente tal definição pressupõe que tenhamos especificado uma linguagem artificial e uma interpretação para essa linguagem.

Mas essa é uma primeira definição do que seja uma lógica. Não haveria outras?

Há sim. A definição acima nos dá ainda uma outra maneira de definir uma lógica — no caso, o **CPC** — que é através do *conjunto das fórmulas válidas*. Nesse caso particula, o conjunto das tautologias. Mas o que tem isso a ver com a relação de consequência $\vDash$?

Digamos que tenhamos três fórmulas, α, β e γ, tal que acontece o seguinte:

$$\alpha, \beta \quad \vDash \quad \gamma.$$

Ou seja, γ é consequência lógica de α e β. Pela nossa definição de consequência, toda valoração que for modelo de α e β é modelo de γ. Seja então V alguma valoração tal que α e β são verdadeiras em V, isto é, $V(\alpha) = \mathbf{V}$ e $V(\beta) = \mathbf{V}$. Então, claro, $V(\gamma) = \mathbf{V}$.

Agora, se $V(\alpha) = \mathbf{V}$ e $V(\beta) = \mathbf{V}$, então, obviamente, $V(\alpha \wedge \beta) = \mathbf{V}$, certo? O que temos então é que, se $V(\alpha \wedge \beta) = \mathbf{V}$ para uma valoração V qualquer, então $V(\gamma) = \mathbf{V}$. Mas se isso ocorre, então é fácil ver que o condicional

$$(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma$$

deve ser uma tautologia. Esse condicional só seria falso se houvesse alguma valoração em que α e β são verdadeiras, mas γ é falsa. Mas isso não ocorre, pois γ é consequência lógica de α e β.

Generalizando: digamos que temos um conjunto finito de fórmulas, $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, e alguma fórmula γ qualquer. Podemos demonstrar o seguinte fato:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \vDash \gamma \quad \text{sse} \quad \vDash (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \rightarrow \gamma.$$

Ou seja, γ é consequência lógica de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ se e somente se o condicional $(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \rightarrow \gamma$ é uma tautologia.

Poderíamos então dizer que o **CPC** é o conjunto de todas as tautologias. No caso geral, diríamos então que *uma lógica é um conjunto de fórmulas válidas sob uma certa interpretação*.

Bem, se temos essas duas maneiras de caracterizar uma lógica, cabe a pergunta: são equivalentes? Tanto faz qual usemos? A resposta é que isso nem sempre é assim; mas um exemplo vai ter que aguardar um próximo capítulo.

Para encerrar esta seção, note que apresentamos uma caracterização *semântica* do que seja uma lógica: ou por meio de uma relação (semântica) de *consequência lógica*, ou por meio da noção (semântica) de uma *tautologia*. No entanto, na *Introdução à lógica* você havia visto uma outra maneira de definir consequência, que era uma maneira *sintática*. Lá era dito que uma fórmula α é consequência lógica (sintática) de um conjunto de fórmulas Γ se há uma *dedução* de α a partir de fórmulas de Γ. Como a via sintática é uma outra maneira de caracterizar o que seja uma lógica, falaremos um pouco a respeito disso na próxima seção.

1.6 Uma axiomatização para o CPC

A maneira sintática de definir conseqüência lógica é feita, de modo geral, por recurso a algum *sistema de prova* — o que permite derivar uma fórmula a partir de outras através de operações de manipulação de símbolos. Existem várias maneiras de fazer isso, como vimos na *Introdução à lógica*: lá o principal método utilizado (cf. caps. 13 a 15) foi o de *dedução natural*. Há ainda muitos outros: cálculo de seqüentes, resolução — ou ainda, que é o que vamos ilustrar aqui, o *método axiomático*.

Ora, por que tal método? A razão básica é que vários sistemas de lógica não clássica foram apresentados inicialmente dessa maneira, e o método axiomático tem a vantagem de permitir comparações fáceis entre os diferentes sistemas. (Não que não se possa fazer isso com outros métodos, é claro, mas às vezes as coisas ficam menos perspícuas.) Assim, embora o método axiomático seja menos intuitivo quando se pretende trabalhar dentro de um sistema de lógica, ele é muito mais ilustrativo, quando se trabalha com vários sistemas ao mesmo tempo, para as interrelações entre tais sistemas.

O propósito desta seção é apenas exemplificar uma lógica — o **CPC** — do ponto de vista axiomático; você não precisa se preocupar em operar com o sistema, ou fazer demonstrações dentro do sistema.

Vamos lá então. A apresentação axiomática de um sistema de lógica (um sistema formal de modo geral) consiste em apresentar a linguagem do sistema (o que já fizemos acima para o **CPC**) e definir as expressões bem-formadas, o que também já fizemos com a definição de fórmula.

Como você recorda da *Introdução à lógica* (e se não, dê uma olhada outra vez no cap. 12), um sistema formal F qualquer é especificado por meio de quatro componentes básicos:

(i) um *alfabeto*, isto é, um conjunto de *símbolos primitivos*, que contém os caracteres da linguagem formal empregada em F (por exemplo, o alfabeto do **CPC** que vimos acima: as variáveis, os operadores e os sinais de pontuação);
(ii) um conjunto de *regras de formação*, que caracterizam quais são as expressões (sequências de caracteres) da linguagem de F que são bem-formadas (por exemplo, a definição de fórmula no **CPC** nos dá um exemplo de um conjunto de regras de formação);
(iii) um conjunto de *axiomas*, isto é, um conjunto de expressões bem-formadas aceitas sem demonstração;
(iv) um conjunto de *regras de produção*, ou *regras de transformação*, que nos dizem como obter (produzir, derivar) novas expressões bem-formadas a partir dos axiomas e outras expressões já derivadas.

O primeiro item constitui então o conjunto de símbolos primitivos da linguagem de um sistema formal. É claro que outros símbolos podem ser introduzidos como símbolos definidos. Nosso exemplo aqui será a axiomática para o **CPC** apresentada por E. Mendelson (cf. Mendelson 1979), que tem apenas os operadores $\neg$ e $\rightarrow$ como primitivos. Os demais operadores, $\wedge$, $\vee$ e $\leftrightarrow$ são definidos da maneira usual, isto é:

$$
\begin{aligned}
\alpha \wedge \beta &=_{\text{df}} \neg(\alpha \rightarrow \neg\beta), \\
\alpha \vee \beta &=_{\text{df}} \neg\alpha \rightarrow \beta, \\
\alpha \leftrightarrow \beta &=_{\text{df}} (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha).
\end{aligned}
$$

Isso deve ser entendido da seguinte maneira: uma fórmula $\alpha \wedge \beta$, por exemplo, é uma *abreviação* da fórmula $\neg(\alpha \rightarrow \neg\beta)$ correspondente, e assim por diante.

As regras de formação são a definição de fórmula já vista.

O passo seguinte consiste em selecionar, dentre o conjunto de todas as fórmulas, um subconjunto de fórmulas que consistirá nos enunciados primitivos, ou axiomas, do sistema. Feito isso, são indicadas regras de transformação (ou regras de inferência) que dizem como manipular certas seqüências de símbolos para derivar outras.

Usaremos o seguinte conjunto de (esquemas de) axiomas:

A1. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$,
A2. $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$,
A3. $(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow ((\neg\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta)$.

Um axioma é uma fórmula de uma linguagem — e você deve ter notado que A1–A3 acima não são fórmulas, mas esquemas de fórmulas. Axiomatizando o **CPC** através de esquemas, temos, claro, um conjunto infinito de axiomas. Por exemplo, todas as fórmulas abaixo são *instâncias* de A1 — ou axiomas A1:

$$\begin{array}{rcl} p & \to & (q \to p), \\ q & \to & (p \to q), \\ p & \to & (p \to p), \\ \neg\neg q & \to & ((p \vee q) \to \neg\neg q), \\ (p \wedge \neg q) & \to & ((s \leftrightarrow r) \to (p \wedge \neg q)). \end{array}$$

Na primeira, temos p no lugar de α e q no lugar de β. Na segunda, é o contrário: q no lugar de α e p no lugar de β. Na terceira, p aparece tanto no lugar de α quanto de β. Isso não é um problema; α e β são fórmulas quaisquer — podem ser a mesma. O que *não* pode acontecer é trocar uma ocorrência de α por alguma fórmula, e outra por uma fórmula diferente. Por exemplo, a fórmula a seguir *não* é uma instância do axioma A1:

$$p \quad \to \quad (q \to r),$$

pois a substituição de α não foi feita de maneira uniforme.

Além dos axiomas, temos num sistema formal as regras de inferência. A única regra de inferência de nosso sistema será a regra de *modus ponens*:

MP. de α e $\alpha \to \beta$ podemos inferir β.

Se você já trabalhou, como na *Introdução à lógica*, com algum sistema de dedução natural, a regra de modus ponens já é uma velha conhecida. Se tivermos um condicional, e também o antecedente desse condicional, podemos inferir seu consequente. Veremos logo mais um exemplo de como isso funciona.

Vamos chamar o sistema axiomático apresentado acima de P. Essa, é claro, é apenas uma de muitas maneira de apresentar axiomaticamente a lógica proposicional clássica. Você pode conferir em Mendelson 1979 (p. 41–3) algumas outras possibilidades.

Seja agora F um sistema formal qualquer (como o sistema P apresentado acima). Vamos agora definir as noções de *prova* (ou demonstração) em F, e uma *dedução* em F. (Note que isso vale para *qualquer* sistema formal, o que vai incluir as lógicas não clássicas que veremos mais adiante.)

Definição 1.4. Seja α uma fórmula. Uma *prova* (ou *demonstração*) de α em F é uma seqüência finita $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de fórmulas, tal que $\alpha_n = \alpha$ e para todo i, $1 \leq i \leq n$, (i) α_i é um axioma de F, ou (ii) α_i foi obtida a partir de fórmulas que aparecem antes na seqüência por meio da aplicação de alguma regra de inferência de F.

Em outras palavras, uma prova de α é uma seqüência finita de fórmulas em que α é a última fórmula, e qualquer fórmula da seqüência ou é axioma, ou, se não for um axioma, então foi obtida por regras de inferência de fórmulas anteriores. Em nosso caso, a única regra de inferência é modus ponens; assim, uma prova será uma sequência de fórmulas que ou são axiomas ou foram obtidas por MP de fórmulas que aparecem antes na sequência.

Se há uma prova de α em F, dizemos que α é um *teorema de* F, o que representamos por $\vdash_F \alpha$.

Mas passemos a um exemplo de uma prova em nosso sistema P, para explicar tudo o que está acontecendo: vamos mostrar que $p \to p$ é um teorema dessa axiomatização do **CPC**.

Considere a sequência de 5 fórmulas apresentada a seguir:

1.	$p \to (p \to p)$	A1
2.	$p \to ((p \to p) \to p)$	A1
3.	$(p \to ((p \to p) \to p)) \to ((p \to (p \to p)) \to (p \to p))$	A2
4.	$(p \to (p \to p)) \to (p \to p)$	2,3 MP
5.	$p \to p$	1,4 MP

A estrutura acima satisfaz a definição de prova apresentada. Temos uma sequência finita de fórmulas — 5 fórmulas, numeradas de 1 a 5. No lado direito, escrevemos a justificação de cada linha, isto é, indicamos se a fórmula é um axioma ou foi obtida por meio da aplicação de regras de inferência. Como você facilmente pode verificar, cada uma das fórmas é mesmo um axioma (nas linhas 1, 2 e 3) ou foi obtida por meio de MP de fórmulas anteriores (linhas 4 e 5). Por exemplo, a fórmula na linha 5 foi obtida por MP das fórmulas que estão na linha 1 e na linha 4. Veja:

$$\begin{array}{lcl} p \to (p \to p) & & \\ (p \to (p \to p)) & \to & (p \to p) \\ & & \quad p \to p \end{array}$$

Note que a fórmula na linha 1, $p \to (p \to p)$, é um axioma: é uma instância (um caso particular) do axioma A1. Nesse caso, trocamos tanto α quanto β por p. A fórmula na linha 4 também é uma instância de A1: trocamos α por p, e β por $p \to p$.

Uma vez que temos essa prova, está demonstrado que $p \to p$ é um teorema do sistema P, o que registramos escrevendo '$\vdash_P p \to p$'.

A noção (sintática) de um *teorema* corresponde à noção semântica de uma *fórmula válida* ou, no nosso caso, de uma tautologia. Assim, se tínhamos caracterizado o **CPC** semanticamente como o *conjunto de todas as tautologias*, podemos agora caracterizá-lo sintaticamente como o *conjunto de todos os teoremas do sistema* P.

Obviamente, tal caracterização pressupõe uma coisa: que tenhamos demonstrado que uma fórmula é uma tautologia se e somente se for um teorema de P. Isto é, precisamos ter estabelecido a proposição a seguir:

Teorema 1.1. $\vdash_P \alpha$ *sse* $\vDash \alpha$.

Este teorema é chamado de Teorema de Correção e Completude.

Aqui uma observação importante: o Teorema 1.1 não é um teorema *do* sistema P, mas um teorema (na metalinguagem) *a respeito de* P. Ou seja, um *metateorema*. A distinção aqui é entre uma fórmula da linguagem de um sistema que pode ser demonstrada a partir dos axiomas do sistema (teorema de P) e entre uma proposição na metalinguagem a respeito do sistema, mostrando que o sistema como um todo tem uma certa propriedade (metateorema, sobre P).

Voltando às correspondências entre sintaxe e semântica, tínhamos antes uma noção semântica de consequência lógica. Podemos ter também uma noção sintática. Para isso, precisamos definir o que seja uma dedução em um sistema formal F qualquer.

Definição 1.5. Sejam Γ um conjunto qualquer de fórmulas e α uma fórmula. Uma *dedução* de α a partir de Γ em um sistema F é uma seqüência finita $\delta_1, \ldots, \delta_n$ de fórmulas, tal que $\delta_n = \alpha$ e para todo i, $1 \leq i \leq n$, (i) δ_i é um axioma de F, ou (ii) $\delta_i \in \Gamma$, ou (iii) δ_i foi obtida a partir de fórmulas que aparecem antes na seqüência, por meio da aplicação de alguma regra de inferência de F.

A diferença de uma dedução para uma prova é que as fórmulas em uma dedução, além de serem axiomas ou obtidas por regras de inferências, podem ser também fórmulas que pertencem ao conjunto Γ de premissas.

Podemos, claro, mostrar que uma *prova* de α como uma dedução de α a partir do conjunto vazio $\emptyset$.

Com isso, podemos agora definir consequência lógica.

Definição 1.6. Seja Γ um conjunto qualquer de fórmulas e α uma fórmula de um sistema formal F qualquer. Dizemos que α é *conseqüência lógica* de Γ em F, ou que α é *dedutível de* Γ em F, o que denotamos por '$\Gamma \vdash_F \alpha$', se há uma dedução de α a partir de Γ em F.

Note-se que a relação de dedutibilidade é sempre relativizada ao sistema F (e a uma certa linguagem proposicional). Porém, se estiver claro pelo contexto qual é linguagem, ou isso for irrelevante, podemos escrever simplesmente '$\Gamma \vdash \alpha$' para indicar que α é dedutível de Γ em F.

Vamos a um exemplo de uma dedução em P, nossa axiomatização do **CPC**. Mostraremos que $p \to q,\ q \to r \vdash p \to r$.

1.	$p \to q$	fórmula de Γ
2.	$q \to r$	fórmula de Γ
3.	$(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$	A2
4.	$(q \to r) \to (p \to (q \to r))$	A1
5.	$p \to (q \to r)$	2,4 MP
6.	$(p \to q) \to (p \to r)$	3,5 MP
7.	$p \to r$	1,6 MP

Assim, podemos caracterizar o **CPC** sintaticamente como a relação de consequência $\vdash$ acima definida. E uma lógica, no geral, como uma relação de consequência sintaticamente definida.

Definidas as noções de conseqüência semântica e sintática, coloca-se imediatamente a questão de se são a mesma. Já vimos acima que o conjunto de fórmulas válidas é o mesmo conjunto que o de teoremas. Coincidem as noções semântica e sintática de conseqüência lógica?

Podemos demonstrar (de modo razoavelmente simples) que, para o cálculo proposicional clássico, que isso também acontece. Ou seja, temos uma versão mais forte do metateorema anterior, a saber:

Teorema 1.2. $\Gamma \vdash \alpha$ *sse* $\Gamma \vDash \alpha$.

Para encerrar, uma palavra a respeito de decidibilidade. O **CPC** é decidível, ou seja, existe um método mecânico para determinar se uma fórmula é ou não uma tautologia, ou se uma fórmula é ou não consequência lógica de um conjunto de fórmulas. E você conhece esse método: é o das *tabelas de verdade*. Não vamos revê-lo aqui, mas faremos ocasionalmente referência a ele. Se você tem alguma dúvida, consulte o cap. 9 da *Introdução à lógica*.

Lembre que nem todo sistema lógico é decidível: o cálculo de predicados de primeira ordem não é (confira o cap. 13 da *Introdução à lógica* para mais detalhes a respeito).

1.7 Deficiências da lógica clássica

Apesar de seu extraordinário desenvolvimento e grande número de aplicações, a lógica clássica não deixa de ter suas insuficiências e, segundo alguns, até mesmo incorreções. Daí a motivação para que se proponha sistemas de lógica não clássica.

Como foi mencionado anteriormente neste capítulo, costuma-se separar as lógicas não clássicas em dois grupos:

Lógicas complementares: aquelas cujo objetivo é *estender* a lógica clássica, por exemplo, ampliando o conjunto de termos lógicos, novos operadores à linguagem. Por isso também são chamadas de lógicas *estendidas* ou *ampliadas* ou *extraclássicas*.

Lógicas alternativas: aquelas cujo objetivo é *substituir* a lógica clássica, considerando que ela está errada em parte. Também chamadas de lógicas *rivais* ou *heterodoxas* ou *anticlássicas*.

Essa divisão, contudo, é bastante artificial. (Desde já você pode imaginar que poderíamos ter alguma lógica que estende a clássica por meio de novos operadores, mas que rejeita alguns de seus princípios.) Mas é uma divisão que serve para um começo de conversa e tem suas vantagens do ponto de vista didático.

Com relação a lógicas complementares, e ficando apenas no nível da lógica proposicional, pensemos nos operadores. A noção básica de um operador é que é uma expressão que, aplicada a uma ou mais sentenças, gera uma sentença mais complexa. No **CPC** vimos alguns exemplos, como 'e' e 'não' etc. Mas muitas outras coisas ficaram de fora. O que dizer, por exemplo, dos seguintes (em que p é uma sentença qualquer):

- será verdade que p
- foi sempre o caso que p
- p será verdadeira enquanto q for verdadeira
- necessariamente p
- é possível que p
- sabe-se que p
- acredita-se que p
- é obrigatório que
- p é permitido
- é proibido que p

Tais expressões também são operadores, mas não são tratadas na lógica clássica. Por um lado, não são funções de verdade (e se o fossem seriam definíveis por meio das demais). Por outro, a lógica clássica não se ocupou de coisas como tempo e modalidades.

Assim, temos extensões (do **CPC** por exemplo, mas também do cálculo de predicados) que consistem em ampliar o conjunto dos termos lógicos por meio de operadores como os acima. Temos então vários outros tipos de lógica, a saber:

lógicas modais: necessariamente, possivelmente, implica;

lógicas temporais: será o caso, foi sempre o caso, desde, até que, enquanto;

lógicas epistêmicas: sabe-se acredita-se, é conhecimento comum que;

lógicas deônticas: é obrigatório que, é permitido que, é proibido que.

Neste livro, vamos falar um pouco mais detalhadamente sobre lógicas temporais, para exemplificar sistemas de lógicas complementares.

Mas é claro que as extensões da lógica clássica não se limitam a operadores. Poderíamos ter outras espécies de quantificadores, como: 'a maioria dos', 'muitos', 'poucos' etc. Tais quantificadores não são definíveis com os recursos do cálculo de predicados de primeira ordem, mas podem sê-lo numa lógica de segunda ordem. Estaríamos então ainda na lógica clássica — a menos que só consideremos a lógica elementar como lógica clássica (o que é a posição de alguns filósofos, como por exemplo W. V. O. Quine).

Mas passemos a lógicas alternativas. Aqui a motivação para propor novas lógicas é muito variada. Por exemplo, devemos mesmo admitir os quatro princípios fundamentais? Poderia haver contradições verdadeirs? Será que toda proposição é mesmo verdadeira ou falsa? Não poderia haver proposições que não são nem uma coisa nem outra?

Considere o exemplo a seguir:

(1) O Coelho da Páscoa mora na mesma rua que Papai Noel.

Certamente você não diria que esta afirmação (proposição? e o que é uma proposição?) é verdadeira. Por outro lado, também parece estranho dizer que é falsa, pois daria a entender que o Coelho da Páscoa mora em outra rua. O que nos pareceria mais razoável é dizer que ela não é nem verdadeira nem falsa, já que os supostos indivíduos em questão de fato não existem.[4]

Mas talvez não precisemos rejeitar a bivalência ainda: poderíamos continuar afirmando que toda proposição é mesmo verdadeira ou falsa, mas que (1) acima não expressa uma proposição.

Essa saída, contudo, parece não funcionar no caso de proposições sobre o futuro, como

(2) Estarei em São Paulo na semana que vem.

Note que nesse caso estamos falando sobre objetos existentes. Contudo, dizer que tal proposição é verdadeira pareceria implicar que de certa forma já está determinado que estarei em São Paulo na semana que vem. Analogamente, se ela for falsa parece impossível que eu vá estar lá semana que vem. Em qualquer caso, parece que o futuro já estaria pré-determinado (fatalismo).

[4]Minhas desculpas a todos os que ainda não sabiam disso ...

Talvez então o princípio da bivalência não se aplique a proposições sobre o futuro. Nesse caso, teríamos lógicas polivalentes — em que temos mais de dois valores de verdade.

Por motivos parecidos, poderíamos ser tentados a rejeitar o princípio de não contradição. Alguns filósofos defendem que há contradições reais, verdadeiras. Sentenças paradoxais, como a do mentiroso ('Esta sentença é falsa'), seriam um exemplo. Nesse caso, para tratar de tais fenômenos teríamos que usar lógicas paraconsistentes.

E assim por diante; as motivações para lógicas rivais da lógica clássica são muitas. Neste livro, vamos examinar em detalhe apenas um exemplo de lógica heterodoxa, o das lógicas polivalentes.

Leituras recomendadas

Os capítulos acima relacionados da *Introdução à lógica*. Releia também o capítulo 18, que fala sobre lógicas não clássicas.

Reflita sobre

- Argumentos informais e argumentos formalizados.
- O que são termos lógicos.
- Como especificar um sistema de lógica.
- As maneiras sintática e semântica de definir consequência lógica.
- Características da lógica clássica.
- Deficiências da lógica clássica.

Capítulo 2

Lógicas do tempo

Neste capítulo, vamos investigar um primeiro tipo de lógica não clássica, as *lógicas do tempo* ou *lógicas temporais*, que estendem a lógica clássica tratando de algo que ela deixa de considerar: o tempo.

2.1 Tempo

A motivação que levou ao surgimento da lógica clássica, no século XIX, tinha a ver com a fundamentação da matemática. Na matemática, contudo, tempo é um aspecto irrelevante: podemos até dizer que proposições matemáticas são *atemporais*, pois, afinal de contas, $2+2=4$ não muda de valor de verdade com a passagem do tempo; se alguma coisa era ontem um triângulo, vai continuar a sê-lo por todo o futuro afora. Assim, para representar argumentos envolvendo noções matemáticas, e determinar sua validade, não era necessário levar em conta aspectos temporais.

Mas é claro que isso não vale em geral. Por exemplo, *ontem* estava chovendo em Florianópolis, mas *hoje* não está. A capital do Brasil *em 1950* era o Rio de Janeiro; *em 2011* é Brasília e *em 2258*, quem sabe, seja alguma outra cidade. Em suma, os objetos, em geral, têm ou deixam de ter propriedades dependendo do momento em que se encontram. E *mudança* é justamente isso — passar a ter uma propriedade que antes não se tinha, ou vice-versa; passar a estar numa relação em que antes não se estava, e vice-versa. Tudo isso, claro, pode ter — e tem — consequências para a validade ou não de inferências que fazemos.

Considere um argumento como o seguinte:

(I) Todos os jogadores da seleção brasileira estão treinando.
João é um jogador da seleção brasileira.
$\therefore$ João está treinando.

Você certamente diria que esse argumento é válido: se as premissas forem verdadeiras, não há como a conclusão ser falsa. Ou há?

Para falar a verdade, esse argumento só é válido se abstrairmos do aspecto temporal, exigindo que as premissas sejam verdadeiras *ao mesmo tempo* para testar se, nessa situação, a conclusão também é verdadeira. Podia muito bem acontecer que os jogadores da seleção brasileira estejam treinando *às 9 da manhã*, mas João, um jogador da seleção brasileira, ainda não tinha chegado e não estava treinando *às 7 da manhã*. Do ponto de vista da lógica clássica, porém, tais distinções são desconsideradas: temos que considerar somente situações em que, *ao mesmo tempo*, todas as premissas sejam verdadeiras, e perguntar se nessas situações e *nesse mesmo tempo* a conclusão também é verdadeira. No caso acima, não temos problema algum: diríamos, intuitivamente, que o argumento (e todo outro da mesma forma) é válido, e a lógica clássica confirma que ele é mesmo. (Faça o exercício, se quiser: represente o argumento acima na linguagem do **CQC** que vimos na *Introdução à lógica* e teste sua validade.)

Mas é claro que há outros argumentos cuja validade (ou invalidade) realmente depende de considerações temporais. Veja o próximo exemplo:

(II) Se João é um professor de filosofia, então ele leciona em alguma instituição de ensino.
João foi um professor de filosofia.
$\therefore$ João leciona em alguma instituição de ensino.

Note que a segunda premissa não diz que João é um professor de filosofia, mas que ele *foi* um professor de filosofia. Ora, esse argumento, se traduzido para a linguagem do **CPC**, seria considerado válido, pois abstraímos do tempo. Tudo é considerado como se estivesse no presente; a distinção entre João *é* e João *foi* professor de filosofia se perde. Se usarmos a notação seguinte:

p: João é um professor de filosofia,
q: João leciona em alguma instituição de ensino,

o resultado da tradução do argumento para a linguagem do **CPC** é:

$p \rightarrow q$
p
$\therefore\ q$

Uma forma de argumento que é válida, como podemos facilmente mostrar (ela corresponde à regra de inferência *modus ponens* que vimos no capítulo anterior). Contudo, tal representação formal não corresponde às nossas intuições, pois diríamos que o argumento original não é válido.

Naturalmente, há uma maneira adequada de representar esse argumento em uma linguagem artificial: mas na linguagem do *cálculo de predicados*. Isso pode ser feito assim: cada predicado de grau n passa a ser um predicado de grau $n+1$. Por exemplo, um predicado unário (propriedade) como 'x é um filósofo' passa a ser um predicado binário (relação binária) entre um indivíduo x e um instante t qualquer: 'x é um filósofo no instante t'. Usando t como uma *variável para instantes temporais*, temos:

x é um gato	$\mapsto$	x é um gato em t
x corre	$\mapsto$	x corre em t
x gosta de y	$\mapsto$	x gosta de y em t
x está entre y e z	$\mapsto$	x está entre y e z em t
etc.		

Todos os predicados, assim, ganham um argumento a mais, 'em t', em que t é algum instante. Em particular, predicados de grau zero passam a ser propriedades. Assim:

Chove	$\mapsto$	Chove em t
Sócrates corre	$\mapsto$	Sócrates corre em t
Romeu ama Julieta	$\mapsto$	Romeu ama Julieta em t
etc.		

No caso de nosso argumento acima, as letras sentenciais (que, do ponto de vista do cálculo de predicados, seriam predicados de grau zero) passam a ser predicados de grau um: propriedades de instantes do tempo. 'João é professor de filosofia em t' significa, assim, que o instante t tem a propriedade de que, nele, João é um professor de filosofia.

Usando a notação a seguir:

P: João é um professor de filosofia em t,
Q: João leciona em alguma instituição de ensino em t,
A: x é anterior a y,

nosso argumento acima seria representado da seguinte forma:

$$Pt \to Qt$$
$$\exists t'(At't \wedge Pt')$$
$$\therefore\ Qt$$

Note que a segunda premissa, 'João foi um professor de filosofia', é representada como: existe um instante t' tal que t' é anterior a t (ou seja, está no passado de t) e João é um professor de filosofia em t'. E esse argumento, como se pode mostrar na lógica de primeira ordem (por exemplo, fazendo um tablô como você aprendeu), é mesmo inválido. O resultado, assim, está de acordo com nossas intuições. Portanto, há uma maneira de representar distinções temporais *dentro* da lógica clássica de primeira ordem.

Contudo, embora possamos fazer isso, a tradução resultante fica mais complexa, pois, para representar nosso argumento proposicional estamos (i) usando já uma linguagem de primeira ordem e (ii) quantificando sobre instantes do tempo (note que a segunda premissa tem um quantificador existencial). Recorde, além disso, que o cálculo de predicados de primeira ordem (com pelo menos um símbolo de predicado binário, como acima) é *indecidível*. Não haveria uma solução mais fácil, em particular, uma que continuasse representando o argumento em uma linguagem proposicional?

Há de fato uma alternativa, que são as *lógicas do tempo*. A estratégia utilizada é ampliar nosso conjunto OP de operadores acrescentando alguns *operadores temporais*. Um deles é um operador unário P para o passado, cujo significado é:

$P\alpha$: foi (pelo menos uma vez) o caso que α.

Assim, se p é a proposição (atemporal) 'João é professor de filosofia', Pp representa 'João *foi* um professor de filosofia'.

Desta forma, dispondo de nosso operador unário P para o passado, o argumento anterior poderia ser representado assim:

$$
\begin{array}{l}
p \to q \\
Pp \\
\therefore\ q
\end{array}
$$

Nesse exemplo, Pp significa 'foi o caso que p', isto é, p foi verdadeira em pelo menos uma ocasião passada, mas nada impede que tenha sido verdadeira em mais de uma ocasião. Agora, essa forma de argumento, como mostraremos adiante, é mesmo *inválida* nas lógicas temporais usuais, capturando formalmente nossa intuição de que o argumento informal (II) acima era inválido. A vantagem é que podemos representar adequadamente essa forma de argumento continuando a utilizar uma linguagem proposicional — e num sistema lógico decidível.

Resumindo, a estratégia das lógicas temporais vai ser ampliar o conjunto de símbolos lógicos, acrescentando operadores temporais, tanto para o *passado* quanto para o *futuro*. Tal ideia foi colocada em prática a partir dos anos 50 do século XX, inicialmente devido aos trabalhos do lógico neozelandês Arthur Prior, considerado o fundador da lógica do tempo (ver, em particular, os livros Prior 1957 e 1967).

2.2 A linguagem temporal básica

Em resumo, as lógicas temporais usuais estendem a lógica clássica acrescentando operadores que, como veremos, não são funções de verdade. Consideraremos aqui uma linguagem temporal básica $\mathscr{L}_T$, que consiste em ampliar nossa linguagem do **CPC** por meio de quatro novos operadores unários, dois para o passado e dois para o futuro. São esses os operadores:

F: será o caso que;
G: será sempre o caso que;
P: foi o caso que;
H: foi sempre o caso que.

Uma vez que esses operadores, como dito, são unários, a definição de fórmula que apresentamos no capítulo 1 já dá conta deles: se α é uma fórmula, então $P\alpha$, $F\alpha$, $G\alpha$ e $H\alpha$ também são fórmulas.

A seguir, alguns exemplos do que podemos dizer usando tal linguagem. Digamos que temos a variável p representando a sentença (atemporal) 'João é um professor de filosofia', como acima. Temos então:

(1) Fp : João será um professor de filosofia.
(2) Pp : João foi um professor de filosofia.
(3) Gp : João sempre será um professor de filosofia.
(4) Hp : João sempre foi um professor de filosofia.

Vamos conversar um pouco sobre essas sentenças. A primeira é representada por Fp. Isso significa que a sentença p (João é um professor de filosofia) será verdadeira em algum instante futuro. Isso é o que faz o operador F. Analogamente, Pp, em (2), diz que p foi verdadeira em algum instante passado, isto é, foi o caso que p. Note que, como eu disse acima, esses operadores *não são funções de verdade*. Do fato de p ser verdadeira agora não se segue nem que *foi* verdadeira em algum instante passado, nem que *será* verdadeira ainda em algum instante futuro. A semântica para os operadores temporais, assim, não será feita (como, por exemplo, no caso do operador $\neg$) através de uma tabelinha básica. Mas falaremos sobre isso depois.

Considere agora (3). Em português, dizemos que João sempre será um professor de filosofia. A ideia é que a sentença p, portanto, seja verdadeira em todos os instantes do futuro — ela sempre será verdadeira. E é isso o que faz o nosso operador G. Analogamente, Hp, em (4), diz que p foi verdadeira em todos os instantes passados, isto é, foi sempre o caso que p.

(Antes de continuarmos, contudo, uma observação importante: é claro que Gp será verdadeira se João for um professor de filosofia *em todos os instantes futuros* — mas isso obviamente não deveria incluir instantes que acontecem daqui a mil anos, digamos, quando João não estiver mais entre nós ... Do mesmo modo, ao dizer que 'João sempre foi um professor de filosofia' estamos talvez querendo dizer que, desde que começou a trabalhar, João tem sido professor de filosofia — é diferente de dizer que João tinha essa profissão desde que nasceu. Assim, há que ter um certo cuidado ao representar proposições do português em nossa linguagem temporal. Estamos aqui vendo as coisas ainda de um modo bastante simplificado; linguagens temporais mais sofisticadas que a nossa permitirão fazer distinções mais finas.)

Mas voltemos aos nossos exemplos, considerando agora algumas interações entre operadores temporais e o operador de negação:

(5) $\neg Gp$: João nem sempre será um professor de filosofia.

(6) $\neg Fp$: João nunca será um professor de filosofia.

(5), agora, é claramente a negação de (3). Esta diz que João *sempre* será um professor de filosofia, mas (5) nega isso, dizendo que *nem sempre* João será professor de filosofia: $\neg Gp$. Porém, para que seja verdade que João nem sempre será um professor de filosofia, deve haver algum momento futuro em que ele não seja um professor de filosofia. Assim, a sentença em português em (5) pode também ser representada por $F\neg p$, ou seja: vai ser o caso, em pelo menos alguma ocasião futura, que João não é um professor de filosofia em tal ocasião. Concluímos disso que $\neg Gp$ e $F\neg p$ devem ser equivalentes (e vamos mostrar mais adiante que são mesmo).

Passemos agora à sentença em (6). Ela diz que João nunca será um professor de filosofia. Isso significa dizer que p nunca será verdadeira, ou seja, não é verdade que há algum instante futuro em que p seja verdadeira. Ou seja, $\neg Fp$. Mas note agora que, se p é falsa em todo instante futuro, sua negação $\neg p$ é verdadeira em todos os instantes futuros. Assim, podemos também representar que João nunca será um professor de filosofia através da fórmula $G\neg p$.

Note, porém, que Gp e $G\neg p$ não são contraditórias; uma não é a negação da outra. Tampouco $\neg Fp$ e $F\neg p$ o são. Com efeito, Gp e $G\neg p$ podem ser ambas falsas, desde que p seja falsa em algum instante futuro, e que seja verdadeira em pelo menos um outro. A contraditória de Gp é sua negação, $\neg Gp$. Da mesma forma, as contraditórias de Fp, Pp e Hp são, respectivamente, $\neg Fp$, $\neg Pp$ e $\neg Hp$.

Por outro lado, qual seria a contraditória de $G\neg p$? Obviamente sua negação, $\neg G\neg p$. Isso diz (conforme nosso exemplo acima) que não é o caso que será sempre o caso que $\neg p$, ou seja, que não é o caso que $\neg p$ será sempre verdadeira. Mas isso significa que não é o caso que p será sempre falsa, de onde inferimos que p será verdadeira em pelo menos algum instante futuro: Fp, portanto. Assim, concluímos que $\neg G\neg p$ é equivalente a Fp.

Da mesma forma, podemos facilmente mostrar que Gp e $\neg F\neg p$ são equivalentes. E finalmente, as mesmas observações valem com relação aos operadores para o passado. Representamos que João *nem sempre foi* um professor de filosofia através de $\neg Hp$ ou $P\neg p$, e dizemos que ele *nunca foi* tal coisa usando $\neg Pp$ ou $H\neg p$.

Das considerações acima verificamos que temos certas equivalências entre nossos operadores temporais, explicitadas a seguir (em que α é uma fórmula qualquer):

$$\begin{aligned} G\alpha &\leftrightarrow \neg F\neg\alpha, \\ F\alpha &\leftrightarrow \neg G\neg\alpha, \\ H\alpha &\leftrightarrow \neg P\neg\alpha, \\ P\alpha &\leftrightarrow \neg H\neg\alpha. \end{aligned}$$

Que tenhamos tais equivalências não é de surpreender. Recorde, da *Introdução à lógica* que temos certas leis de equivalência entre quantificadores, a saber:

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{x}\alpha &\leftrightarrow \neg\exists \mathbf{x}\neg\alpha, \\ \exists \mathbf{x}\alpha &\leftrightarrow \neg\forall \mathbf{x}\neg\alpha. \end{aligned}$$

Se atentarmos agora aos operadores temporais, vemos que F significa 'será *alguma vez* verdadeiro que', ao passo que G significa 'será *todas as vezes* verdadeiro que'. Estamos, evidentemente, usando os quantificadores existencial e universal — mas esse uso é deslocado para o nível da *metalinguagem*. Nossa linguagem temporal $\mathscr{L}_T$ é uma linguagem proposicional.

Em virtude das equivalências acima, vemos que bastaria ter G e H em nossa linguagem (ou F e P) para que pudéssemos introduzir, por meio de definições, os outros operadores — como podemos fazer na lógica clássica introduzindo um operador para disjunção exclusiva, e assim por diante.

As relações entre Gp, Fp etc. podem ser representadas por meio de um quadrado (como o quadrado tradicional das oposições na teoria do silogismo). Abaixo você encontra dois quadrados, um para o passado e outro para o futuro, indicando as relações de contraditoriedade etc.:

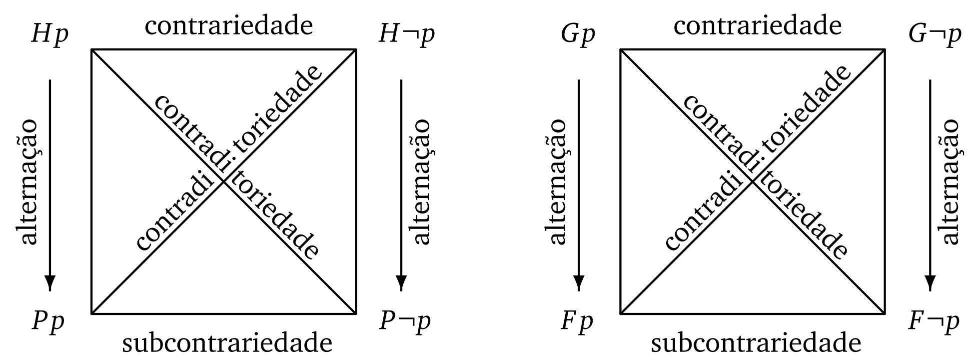


Figura 2.1: Quadrado de oposições para proposições temporais

Vendo no quadrado, por exemplo, que Hp e $P\neg p$ são contraditórias, sabemos que uma é equivalente à negação da outras. Assim, Hp e $\neg P\neg p$ são equivalentes, bem como $P\neg p$ e $\neg Hp$. E similarmente para os demais operadores.

Das outras relações você deve se recordar: duas proposições são *contrárias* se não podem ser ambas verdadeiras, mas podem ser ambas falsas. Isso parece acontecer, por exemplo, entre Gp e $G\neg p$: não diríamos que ambas podem ser verdadeiras, pois parece estranho imaginar que 'sempre vai ser o caso que p' e 'nunca vai ser o caso que p'. Por outro lado, podem ser ambas falsas: p vai ser verdadeira algumas ocasiões futuras (mas nem todas) e $\neg p$ também vai ser verdadeira em algumas ocasiões (mas nem todas).

Duas proposições são ditas *subcontrárias* se não podem ser ambas falsas, mas podem ser ambas verdadeiras. Nos quadrados acima, tal relação se dá entre Fp e $F\neg p$, por um lado, e entre Pp e $P\neg p$, por outro. Parece óbvio que, por exemplo, Pp e $P\neg p$ possam ser ambas verdadeiras: p aconteceu pelo menos uma vez, e deixou de acontecer pelo menos uma vez. Mas pareceria estranho imaginar que p nunca foi verdadeira e que $\neg p$ também nunca foi verdadeira.

Finalmente, a relação de *alternação* se dá entre as proposições na parte superior dos quadrados, e aquelas imediatamente abaixo. Por exemplo, entre Gp (dita *superalterna*) e Fp (dita *subalterna*). A definição é que, se a superalterna é verdadeira, então a subalterna é verdadeira. Isso parece ser o caso: se p sempre vai ser verdadeira, então vai ser verdadeira pelo menos uma vez.[1]

Mas vejamos mais algumas coisas que podemos representar usando operadores temporais. Considere as sentenças abaixo, e as fórmulas que as representam.

(7) PPp : João fora/tinha sido um professor de filosofia.

(8) FPp : João terá sido um professor de filosofia.

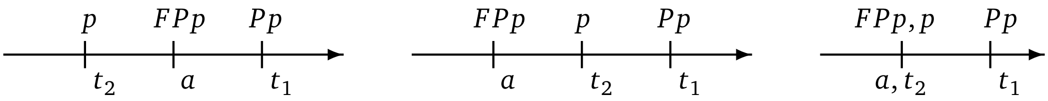
(9) PFp : Foi verdade que João será/seria (?) um professor de filosofia.

Comecemos por (7). A combinação PP parece representar o que chamamos de pretérito perfeito: foi o caso que foi caso que João é um professor de filosofia, ou seja, foi o caso que Pp. Isso equivale, aparentemente, a tinha sido (ou fora) o caso que p.

Por outro lado, parece que não temos em português uma expressão correspondendo à combinação FFp: tal fórmula diz que, em algum instante futuro, será verdadeiro que, mais adiante ainda no futuro, p será verdadeira. Não parece haver um tempo verbal em português para isso (um "futuro distante"?), mas claro que podemos expressar tal coisa usando essa fórmula de nossa lógica do tempo.

[1] Veremos mais adiante, porém, que, exceto pela relação de contraditoriedade, todas as demais dependem de certas suposições adicionais que estamos fazendo sobre a natureza do tempo. Você consegue imaginar que suposições são essas?

Já (8) diz que para algum momento futuro, será verdade que João foi um professor de filosofia. Isto é, há algum instante t_1 no futuro tal que existe um outro instante t_2 no passado de t_1 e, em t_2, João é um professor de filosofia. Mas claro que t_2 pode estar tanto no *nosso passado* quanto no *nosso presente* ou no *nosso futuro*, isto é, ser posterior ao *agora*. Isso é compatível com qualquer uma das três situações abaixo (em que a marca o instante presente, o *agora*, e a seta indica o sentido da passagem do tempo):



Se FPp é verdadeira no instante a, o agora, isso significa que Pp é verdadeira em algum instante t_1 que está no futuro de a, ou seja, posterior a a. Isso é representado nos três diagramas acima. Agora, se Pp é verdadeira em t_1, então p é verdadeira em algum instante t_2 que é anterior a t_1 (ou seja, que está no passado de t_1). Contudo, qual a relação entre t_2 e o agora, a? Ora, t_2 pode estar no passado de a (diagrama da esquerda) ou no futuro de a (diagrama do centro) ou mesmo ser o próprio a (diagrama da direita). A informação dada com a sentença (8) é consistente com cada um desses três diagramas.

(9), por outro lado, parece ser um pouco mais problemática. PFp diz que, em algum instante do passado, Fp foi verdadeira. E isso acontece se p é verdadeira em relação ao futuro — no caso, o futuro daquele instante passado. Mas isto já está no nosso passado também, no nosso presente, ou ainda estará no futuro? 'Foi verdade que João *será* um professor de filosofia' parece dar a entender que isso ainda está em aberto, ao contrário de 'Foi verdade que João *seria* um professor de filosofia', que dá a entender que ele agora já foi professor de filosofia — ou talvez ainda seja, o que diríamos em português, de forma mais precisa, através da sentença 'Foi verdade que João *seria agora* professor de filosofia'. Nossa linguagem temporal ainda não consegue captar essa distinção (mas é claro que podemos estendê-la ainda mais, o que não vamos fazer aqui).

Embora haja alguma relação entre os operadores temporais e os tempos verbais do português, há alguma críticas de que a lógica temporal não represente adequadamente os tempos do português: por exemplo, uma das críticas que se faz é que uma linguagem temporal como $\mathscr{L}_T$ admite construções como $FFPGFp$ que parecem não ter correspondentes em língua natural. Por outro lado, dadas certas suposições simples, é possível mostrar tais fórmulas são equivalentes a construções mais básicas — um assunto para mais adiante.

Para encerrar esta seção inicial, talvez você esteja se perguntando o seguinte: se podemos definir o operador G através de F, será que *um* operador temporal não seria suficiente para definir todos os demais? Não poderíamos definir G por meio de H, ou vice-versa? A resposta é que não podemos — mas para mostrar isso, precisaremos desenvolver primeiro a semântica para nossa linguagem $\mathscr{L}_T$.

Finalmente, é interessante notar que há ainda outros tipos de operadores temporais, além dos quatro que vimos até agora, como ‘desde que’ e ‘até que’. Por exemplo:

(10) João é rico *desde que* ganhou na loteria.

(11) Maria vai ficar em São Paulo *até que* o tempo melhore.

Esses operadores — que são operadores *binários*, como você pode ver, também não podem ser definidos usando os operadores usuais. Não vamos tratar deles aqui.

Exercício 2.1. Simbolize as sentenças abaixo, usando a notação sugerida, e indique, para cada par de sentenças, que relação se dá entre elas (equivalência, contraditoriedade, contrariedade etc.):

p: Romeu ama Julieta;
q: Julieta ama Romeu;
r: Julieta casa com Romeu.

(a) Romeu amará Julieta.
Não é verdade que Romeu nunca vai amar Julieta.
(b) Nem sempre Romeu amará Julieta.
Romeu sempre amará Julieta.
(c) Sempre foi verdade que Romeu não ama Julieta.
Romeu nunca amou Julieta.
(d) Romeu amou Julieta.
Sempre foi falso que Romeu ama Julieta.
(e) Julieta sempre vai amar Romeu.
Nunca vai acontecer que Julieta não ame Romeu.
(f) Julieta nunca vai casar com Romeu.
Julieta não vai casar com Romeu.

Exercício 2.2. Represente as sentenças abaixo em nossa linguagem temporal básica, usando a notação sugerida:

p: Boris é um espião;
q: Natasha é uma espiã;
r: Boris é mais perigoso que Natasha;
s: Natasha é mais esperta do que Boris.

(a) Boris foi um espião, mas não é um espião agora.
(b) Nem Boris nem Natasha serão espiões.

(c) Se Boris sempre vai ser um espião, então sempre vai ser mais perigoso que Natasha.
(d) Nunca aconteceu que Boris fosse e não fosse um espião, mas ele será um espião.
(e) Será sempre verdade que, se Natasha é uma espiã, então ela é mais esperta do que Boris.
(f) Ou Boris sempre foi mais perigoso que Natasha, ou ele nunca foi um espião.
(g) Não foi sempre verdade que Natasha era uma espiã, nem que era mais esperta do que Boris.
(h) Se Natasha é uma espiã e é mais esperta do que Boris, então ela sempre será espiã e mais esperta que Boris.
(i) Nunca foi, nem é, nem será verdade que Boris é mais perigoso que Natasha.

2.3 Semântica

Se uma lógica do tempo realmente pretende estender a lógica clássica, então os operadores temporais não deveriam ser funções de verdade: não entraremos nos detalhes aqui, mas é relativamente fácil mostrar que *qualquer* função de verdade pode ser definida usando apenas os operadores $\neg$, $\wedge$ e $\vee$. Se operadores temporais fossem funções de verdade, então ainda estaríamos, de fato, na lógica clássica e não em alguma extensão dela.

De uma outra maneira, mais intuitiva, também podemos estabelecer que os operadores temporais não são funções de verdade se tentarmos construir uma tabela de verdade para eles. O resultado é o que seria de se esperar:

α	$G\alpha$	$F\alpha$	$H\alpha$	$P\alpha$
V	?	?	?	?
F	?	?	?	?

Se α é verdadeira, isso não garante nem que foi alguma vez verdadeira, nem que será alguma vez verdadeira — quem dirá nunca ou sempre. E se é falsa, também não sabemos se sempre foi assim ou se vai continuar sendo assim. Em qualquer dos casos, não temos como saber. Nossos operadores temporais não são mesmo funções de verdade.

A solução é tornar mais complexos nossos modelos. No caso do **CPC**, um modelo é simplesmente uma valoração: uma função que atribui **V** ou **F** às variáveis proposicionais. Mas é claro que, nessa lógica, abstraímos do tempo. E aqui não. Assim, o primeiro passo para fazer uma semântica para nossa linguagem temporal básica é introduzir uma *estrutura temporal* em nossos modelos.

2.3.1 Estruturas temporais

A razão para considerarmos inválido o argumento (II) da primeira seção deste capítulo era que, embora a proposição (atemporal) 'João é um professor de filosofia' tenha sido verdadeira no passado (ou seja, João *foi* um professor de filosofia), isso não garante que ainda o seja agora. Como vimos, proposições podem mudar de valor de verdade de acordo com o momento: verdadeiras hoje, falsas amanhã, verdadeiras outra vez semana que vem ... Por trás disso está a ideia de que o mundo está *temporalmente estruturado*: estamos num certo instante particular, o *presente*, mas além desse instante há outros que já fazem parte do passado, e ainda outros que estão no (ou são o) futuro. Todos esses instantes, assim, encontram-se numa certa *ordenação*: dizemos, por exemplo, que um certo instante t_1 é anterior a um outro instante t_2 — ou então, que t_2 é posterior a t_1, o que dá no mesmo. Para simplificar a discussão, vamos representar esse fato por '$t_1 \prec t_2$'.

Nossa ideia básica de uma estrutura temporal, então, é a de um conjunto infinito de instantes ordenados por alguma relação $\prec$ que indica anterioridade/posterioridade. É claro que costumamos fazer algumas exigências dessa relação de ordem: por exemplo, não pode acontecer que um instante t seja anterior (ou posterior) a si mesmo, certo? Nem pode acontecer que t_1 seja anterior e também posterior a t_2, concorda? E assim por diante.

Contudo, o que é afinal de contas o tempo, de cujos instantes estamos falando? Será que existem mesmo instantes do tempo? Ou o que temos são apenas estados diferentes e sucessivos da história do universo?

Vamos procurar esclarecer isso um pouco. Imagine que a história do universo seja como num filme de cinema: temos uma sucessão de imagens (estáticas) distintas. No caso do cinema, é a projeção dessas imagens com uma certa velocidade que nos dá a impressão de movimento e "passagem do tempo" — na verdade, o que temos é simplesmente uma sucessão de cenas estáticas.

Tente agora imaginar o seguinte e reflita se é mesmo possível: poderia acontecer que, em certo instante, o universo inteiro ficasse "paralisado", sem ocorrer nada de novo ... e enquanto isso se passassem um milhão de anos? Se você acha que isso é teoricamente possível, você tem uma idéia de tempo como algo absoluto: pode haver passagem do tempo sem que haja mudança alguma nas coisas (assim como podemos ter um espaço que não contém absolutamente nada, nem matéria nem energia). Essa visão absoluta é a que encontramos, por exemplo, na concepção de Isaac Newton.[2]

Uma concepção diferente é do tempo como algo relativo: não há tempo se não houver mudança. Aquilo que chamamos de tempo é simplesmente a

[2]Para maiores detalhe sobre esse tipo de teoria sobre o tempo, recomendo a leitura do cap. IV de Lacey 1972, especialmente a seção 17.

ordenação dos diferentes estados em que se encontra o universo — como a sequência de cenas num filme. Tal concepção — uma versão da qual já tinha sido sustentada por Aristóteles — é a que encontramos na filosofia de Gottfried Leibniz.[3] Segundo essa maneira de ver as coisas, não poderia ocorrer o que imaginamos acima: que o tempo fosse passando, um instante após o outro, sem que houvesse mudança alguma no universo. Tempo seria apenas a ordem em que colocamos os diferentes estados do universo.

A lógica do tempo não procura resolver a questão acima. Sabemos que é preciso introduzir uma estrutura temporal em nossos modelos: teremos então um conjunto não vazio T, cujos elementos denominaremos informalmente 'instantes' ou 'momentos', mas podemos também pensar neles como os sucessivos estados do mundo, não importa. O que importa é que as proposições terão valores de verdade de acordo com esses elementos de T.

Porém, como vimos acima, nosso conjunto T não vai ser apenas um amontoado de instantes sem relação alguma uns com os outros: a ideia é que esses instantes estejam em uma certa ordem ou sucessão, representada por $\prec$. Mas que propriedades tem essa relação $\prec$ de ordenação?

Pense um pouco em qual é a visão que você tem do tempo. A concepção usual, e imagino que a sua também, é que os instantes estão ordenados como se estivessem em uma linha reta sem começo nem fim (ou seja, temos um conjunto infinito de momentos): o tempo sempre existiu e sempre vai existir. Há, no entanto, uma direção nessa reta, que aponta do passado em direção ao futuro. Assim:

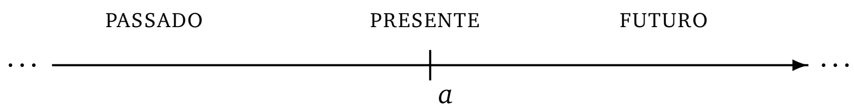


Figura 2.2: A reta temporal usual

A direção da seta indica a direção da passagem do tempo, da esquerda (passado) para a direita (futuro). E a linha vertical com o a marca o 'agora', o instante presente.

Além disso, costumamos pensar que essa relação de ordem tem a propriedade de ser ao menos *densa*: entre dois instantes quaisquer há sempre pelo menos mais um. Entre as quatro e as cinco da tarde temos as quatro e meia, mas entre quatro e quatro e meia temos quatro e quinze, entre as quatro e as quatro e um minuto temos as quatro horas e 30 segundos, e assim por diante, contando décimos, centésimos, milésimos de segundo. Em outras palavras, essa

[3]Maiores detalhes você encontra também no cap. IV de Lacey 1972, especialmente a seção 19.

reta temporal teria a mesma estrutura do conjunto dos números racionais. Ou quem sabe até dos reais — caso em que teríamos uma reta *contínua*. (Em certo sentido, a reta racional tem muitos "buracos": é onde estão os números irracionais como π e $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$, por exemplo.)

Assim, a concepção usual da estrutura temporal é a de um conjunto infinito, pelo menos denso, de instantes linearmente ordenados.

Mas será? Talvez você tenha ouvido falar naquela concepção do "eterno retorno": nesse caso, os instantes ainda estariam linearmente ordenados — mas formando um círculo! Tudo o que já aconteceu vai voltar a acontecer. Algumas culturas têm tal concepção: por exemplo, o grande ano de Brahma no hinduísmo.

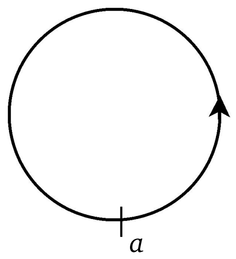


Figura 2.3: Tempo circular

No diagrama acima, o tempo é uma linha — mas tem a forma de uma circunferência. Se a é o agora, os instantes à direita formam o futuro — mas veja que indo suficientemente longe no futuro chegamos ao passado. Isso tem a consequência, claro, de que cada instante é anterior e posterior a si mesmo.

Para uma outra variante, a física contemporânea não considera o tempo como algo totalmente separado do espaço: o que temos é um espaçotempo. E se a teoria do Big Bang estiver certa, o tempo começou junto com o universo: assim, teríamos uma espécie de primeiro instante. Mesmo se considerássemos o tempo como uma reta, podia ser uma reta com um início, assim:

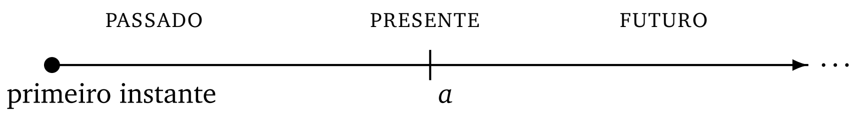


Figura 2.4: Reta temporal com início

E talvez não tenhamos um conjunto infinito de instantes: o tempo poderia ter fim, poderia haver um último momento (ao final do universo). E talvez não seja verdade que entre dois instantes sempre há um terceiro: o tempo, assim como matéria e energia, poderia ter uma estrutura discreta.

E finalmente, costumamos pensar que o passado, o que já aconteceu, não mais pode ser alterado: o passado é fixo e é um só. Já o futuro ainda está "aberto", indeterminado; há muitos modos diferentes como o futuro pode ser — vários futuros alternativos, por assim dizer. Nossa estrutura temporal poderia então parecer com a apresentada na figura a seguir:

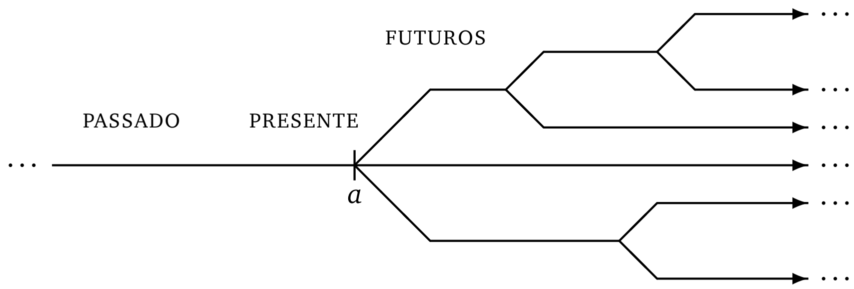


Figura 2.5: Estrutura temporal com futuros possíveis

Nessa figura, o passado é uma linha — há só um curso de eventos que de fato ocorreu. Mas a partir do instante presente a, há várias possibilidades de como possa ser o futuro. Talvez dependendo de escolhas que façamos.

Como você vê, então, há muitas concepções diferentes sobre como seria a nossa estrutura temporal. Em vista disso, duas questões surgem imediatamente. A primeira delas é:

- Estruturas temporais diferentes dão origem a diferentes lógicas do tempo? Ou seja, o conjunto das fórmulas válidas vai variar dependendo de qual estrutura temporal consideremos?

A resposta é sim! Não podemos mostrar isso ainda — precisamos primeiro das definições de verdade, validade etc. — mas sim, diferentes estruturas temporais darão surgimento a diferentes lógicas do tempo. Uma ou outra será a mais adequada, dependendo da estrutura temporal subjacente. E isso nos traz à próxima questão:

- Qual estrutura temporal devemos adotar ao desenvolver uma lógica do tempo?

A resposta é que, de um ponto de vista lógico … nenhuma delas!

Esclareçamos isso. Se diferentes estruturas originam diferentes lógicas, podemos nos perguntar se alguma dessas é *a* lógica correta do tempo … ou se faz até sentido perguntar se há alguma lógica correta. Por exemplo, a lógica que deveríamos utilizar deve ser adequada a como o tempo de fato é, ou a como pensamos que ele é?

Podemos fazer aqui uma analogia com as geometrias. Você sabe que existem várias geometrias: a geometria euclidiana, a geometria de Riemann, a de Lobachevski ... todas elas diferentes. Por exemplo, na geometria euclidiana a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180 graus. Na de Riemann, é *maior* do que 180 graus; na de Lobachevski, é *menor*.

Ora, um geômetra ocupa-se de desenvolver as diferentes geometrias — mas não está preocupado em saber qual delas de fato corresponde ao espaço físico. Analogamente, um lógico procura desenvolver diferentes sistemas de lógica — do tempo, por exemplo — sem se preocupar com qual delas corresponde à estrutura do tempo físico. Essa decisão é deslocada para o *usuário* da lógica.

Lógicas, assim, seriam como ferramentas — mais ou menos adequada dependendo do contexto de uso. Falaremos de tais coisas mais adiante, no capítulo 4.

Mas antes disso, e antes que se passe muito tempo ... voltemos à nossa semântica.

A ideia básica aqui é que as proposições podem ter diferentes valores nos diferentes instantes. Assim, uma valoração não será mais simplesmente uma função de VAR em $\{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$, mas uma função de VAR $\times\, T$ em $\{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$. Ou seja, poderemos ter coisas como:

$$\begin{aligned} V(p, t_1) &= \mathbf{V}, \\ V(p, t_2) &= \mathbf{F}, \end{aligned}$$

em que t_1 e t_2 são dois diferentes instantes pertencendo ao conjunto T. A proposição p, assim, é verdadeira em t_1, mas falsa em t_2.

Vejamos as definições (e vamos usar a letra gótica $\mathfrak{T}$ para nossas estruturas temporais):

Definição 2.1. Uma estrutura temporal $\mathfrak{T}$ para nossa linguagem temporal básica é um par ordenado $\langle T, \prec\rangle$, em que:

(a) T é um conjunto não vazio (instantes ou estados);

(b) $\prec$ é uma relação binária em T (relação de ordenação temporal), ou seja, $\prec\ \subseteq T \times T$.

Uma estrutura corresponde a uma ontologia: que instantes temos, e como eles estão ordenados entre si. Em outras palavaras, $\mathfrak{T}$ vai dizer como o tempo está estruturado para nós. A concepção usual que temos é que o tempo é como se fosse uma linha reta, sem início nem fim, mas a definição acima realmente não diz nada a respeito disso. Para começo de conversa, T é simplesmente um conjunto não vazio. Poderíamos ter então um conjunto de dois instantes: t_1 e t_2, tal que $t_1 \prec t_2$, como na fig. 2.6 abaixo.

Para que tenhamos uma estrutura temporal de acordo com nossas concepções — um conjunto infinito de instantes, linearmente ordenados — precisamos exigir algo mais de T e $\prec$.

Figura 2.6: Uma estrutura temporal finita

Porém, como dito acima, na lógica do tempo não deveríamos nos comprometer com uma estrutura temporal particular, e sim ter vários sistemas dependendo da estrutura. Questão: haveria fórmulas que são válidas em nossa linguagem temporal independente de qual seja a estrutura do tempo? A resposta é positiva, como logo mais veremos.

Vamos então apresentar um primeiro sistema de lógica temporal — uma lógica temporal minimal — que poderá ser aplicada a qualquer estrutura. Mais adiante veremos o que precisamos exigir de T e $\prec$ para gerar estruturas de acordo com outras concepções (como tempo linear, circular, contínuo etc.).

2.3.2 Modelos e verdade

Uma estrutura temporal, assim, nos diz que instantes há e como eles estão ordenados. Para definir a verdade de uma fórmula, no entanto, precisamos da noção de um modelo — que é simplesmente uma estrutura temporal junto com uma valoração:

Definição 2.2. Um *modelo* $\mathfrak{M}$ para a linguagem temporal básica é um par ordenado $\langle \mathfrak{T}, V \rangle$, em que $\mathfrak{T}$ é uma estrutura temporal e V uma valoração, ou seja, uma função de $\textsc{var} \times T$ em $\{\mathsf{V}, \mathsf{F}\}$.

Para simplificar, podemos falar de um modelo também com uma tripla ordenada $\langle T, \prec, V \rangle$, mas lembre que na verdade são duas coisas: uma *estrutura temporal* junto com uma *valoração*.

Um modelo, assim, tem um conjunto de instantes ordenados por $\prec$, e uma valoração que atribui a cada variável um valor num certo instante. Como agora calcular o valor de uma fórmula complexa num certo instante t?

No caso dos operadores usuais do **CPC**, isso é simples: eles são funções de verdade, recorda? Assim, se α for verdadeira em algum instante t — isto é, $V(\alpha, t) = \mathsf{V}$ —, o valor de $\neg\alpha$ nesse mesmo instante será F — isto é, $V(\neg\alpha, t) = \mathsf{F}$. E o mesmo vale para os demais operadores clássicos: uma conjunção é verdadeira (num certo instante) se cada um de seus elementos for verdadeiro (nesse instante).

Mas como ficam os operadores temporais? A resposta está na próxima definição, que vou comentar logo em seguida:

Definição 2.3. Seja $\mathfrak{M} = \langle T, \prec, V \rangle$ um modelo para a linguagem temporal básica. O valor de alguma fórmula não atômica α em algum instante $t \in T$ é determinado da seguinte maneira:

(a)	$V(\neg\alpha, t) = \mathbf{V}$	sse	$V(\alpha, t) = \mathbf{F}$;
(b)	$V(\alpha \wedge \beta, t) = \mathbf{V}$	sse	$V(\alpha, t) = \mathbf{V}$ e $V(\beta, t) = \mathbf{V}$;
(c)	$V(\alpha \vee \beta, t) = \mathbf{V}$	sse	$V(\alpha, t) = \mathbf{V}$ ou $V(\beta, t) = \mathbf{V}$;
(d)	$V(\alpha \rightarrow \beta, t) = \mathbf{V}$	sse	$V(\alpha, t) = \mathbf{F}$ ou $V(\beta, t) = \mathbf{V}$;
(e)	$V(\alpha \leftrightarrow \beta, t) = \mathbf{V}$	sse	$V(\alpha, t) = V(\beta, t)$;
(f)	$V(F\alpha, t) = \mathbf{V}$	sse	existe um $t' \in T$ tal que $t \prec t'$ e $V(\alpha, t') = \mathbf{V}$;
(g)	$V(G\alpha, t) = \mathbf{V}$	sse	para todo $t' \in T$ tal que $t \prec t'$, $V(\alpha, t') = \mathbf{V}$;
(h)	$V(P\alpha, t) = \mathbf{V}$	sse	existe um $t' \in T$ tal que $t' \prec t$ e $V(\alpha, t') = \mathbf{V}$;
(i)	$V(H\alpha, t) = \mathbf{V}$	sse	para todo $t' \in T$ tal que $t' \prec t$, $V(\alpha, t') = \mathbf{V}$.

Vamos esclarecer isso tudo. As cláusulas (a)–(e) são praticamente as mesmas que você já conhece: a diferença é a relativização do valor de uma fórmula a um instante, ou seja, a um elemento de T.

Passemos então ao que há de realmente novo, as condições de verdade para fórmulas envolvendo os operadores temporais. Note que as definições refletem nossa intuição: a cláusula (f), por exemplo, diz que $F\alpha$ é verdadeira em um certo instante t se existe algum instante t' posterior a t — ou seja, no *futuro* de t — e α é verdadeira em t'. Similarmente na cláusula (g): $G\alpha$ é verdadeira em t se α for verdadeira em todos os instantes t' posteriores a t — isto é, se α for sempre verdadeira a partir de t. (A propósito, o fato de $G\alpha$ ser verdadeira em t não significa que α *já é* verdadeira em t: apenas que α *será* verdadeira em qualquer instante posterior a t.)

A mesma coisa vale para os operadores do passado. Por exemplo, $P\alpha$ é verdadeira em um certo instante t se existe algum instante t' anterior a t — ou seja, no *passado* de t — e α é verdadeira em t'.

Alguns exemplos podem ajudar a esclarecer isso. Considere o modelo, vamos chamá-lo de $\mathfrak{M}_1$, representado no diagrama a seguir:

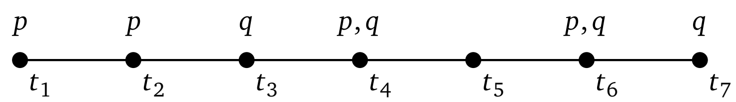


Figura 2.7: Exemplo de modelo temporal: $\mathfrak{M}_1$

Nesse modelo, o conjunto T de instantes é finito: apenas 7 instantes, de t_1 a t_7, representados no diagrama por círculos pretos. Para simplificar a representação da relação de ordenação temporal $\prec$, vamos convencionar o seguinte: se um instante aparece *à esquerda* de outro, ele é *anterior* ao outro. Assim, t_1 é anterior a todos os demais instantes — sendo, assim, o primeiro momento da história no modelo $\mathfrak{M}_1$. Já t_5 é anterior apenas a t_6 e t_7. Este, aliás, é o último momento desse universo: o tempo acaba em t_7.

Note ainda que temos uma estrutura temporal descontínua: entre t_1 e t_2, por exemplo, não há um outro instante.

A valoração V — para as variáveis p e q apenas — está sendo representada da seguinte forma: se a um instante temos associada uma letra (por exemplo, acima de t_2 encontramos p), isso significa que a variável é verdadeira naquele instante. Assim, $V(p, t_2) = \mathsf{V}$. Se a letra não aparece, a variável é falsa. Assim, $V(p, t_3) = \mathsf{F}$. Note que, em t_5, tanto p quanto q são falsas. Por outro lado, em t_4 ambas são verdadeiras.

Agora podemos verificar que valores certas fórmulas complexas obtêm nos diferentes instantes do modelo acima.

Exemplo 2.1. Qual o valor de $\neg q$ em t_1?

Temos, pela cláusula (a) da definição 2.3 de modelo, que:

(a) $V(\neg\alpha, t) = \mathsf{V}$ sse $V(\alpha, t) = \mathsf{F}$.

Ou seja, uma negação é verdadeira (em um instante) se a fórmula negada é falsa (naquele instante). E como podemos ver o diagrama, $V(q, t_1) = \mathsf{F}$. Logo, $V(\neg q, t_1) = \mathsf{V}$.

Mas isso você já sabe calcular. Vamos ver o que ocorre com fórmulas envolvendo operadores temporais.

Exemplo 2.2. Qual o valor de Fp, Gp e $G\neg p$ em t_3?

Note que p é falsa em t_3. Mas o que Fp diz é que p será verdadeira, isto é, que p é verdadeira em algum instante no futuro de t_3. É isso o que temos na cláusula (f) da definição 2.3 de modelo, que diz:

(f) $V(F\alpha, t) = \mathsf{V}$ sse existe um $t' \in T$ tal que $t \prec t'$ e $V(\alpha, t') = \mathsf{V}$.

Podemos agora facilmente ver que (i) $V(p, t_4) = \mathsf{V}$ e que (ii) $t_3 \prec t_4$. Logo, $V(Fp, t_3) = \mathsf{V}$.

Por outro lado, é claro que $V(Gp, t_3) = \mathsf{F}$. Para que Gp fosse verdadeira em t_3, p teria que ser verdadeira em todos os instantes posteriores a t_3. Mas como podemos ver no diagrama, p é falsa em t_7. Logo, $V(Gp, t_3) = \mathsf{F}$. Disso se segue, claro, que $V(\neg Gp, t_3) = \mathsf{V}$.

Qual, porém, é o valor de $G\neg p$? Como vimos ao apresentar $\mathscr{L}_T$, as fórmulas $\neg Gp$ e $G\neg p$ dizem coisas diferentes.

Pela cláusula (g) da definição 2.3 de modelo, temos:

(g) $V(G\alpha, t) = \mathbf{V}$ sse para todo $t' \in T$ tal que $t \prec t'$, $V(\alpha, t') = \mathbf{V}$.

$G\neg p$ seria verdadeira em t_3 se $\neg p$ fosse verdadeira (isto é, se p fosse falsa) em todos os instantes posteriores a t_3. Mas embora p seja mesmo falsa em alguns deles (como em t_7), ela também é verdadeira em alguns outros (como t_4). Assim, $V(G\neg p, t_3) = \mathbf{F}$.

Isso não significa que $G\neg p$ não possa ser verdadeira em outros instantes, como mostra o próximo exemplo.

Exemplo 2.3. Qual o valor de $G\neg p$ em t_6?

Você pode facilmente verificar que t_6 é o último instante em que p é verdadeira. Daí em frente (ou seja, em t_7), p é falsa — o que equivale a dizer que $\neg p$ é sempre verdadeira. Assim, é claro, $V(G\neg p, t_6) = \mathbf{V}$.

Exemplo 2.4. Qual o valor de $H(p \wedge \neg q)$ em t_3?

A cláusula (i) da definição 2.3 de modelo, temos:

(i) $V(H\alpha, t) = \mathbf{V}$ sse para todo $t' \in T$ tal que $t' \prec t$, $V(\alpha, t') = \mathbf{V}$.

Ou seja, $V(H(p \wedge \neg q), t_3) = \mathbf{V}$ se e somente se $p \wedge \neg q$ for verdadeira em todos os instantes anteriores a t_3. E isso é o caso, como você facilmente pode conferir. Em todos os instantes antes de t_3: (i) p é verdadeira e (ii) q é falsa — logo, $\neg q$ é verdadeira.

Assim, $V(H(p \wedge \neg q), t_3) = \mathbf{V}$.

Talvez eu não precise dizer isso, mas note que $H(p \wedge \neg q)$ e $Hp \wedge \neg q$ *não são* a mesma fórmula. Com efeito, quais são as condições para que $Hp \wedge \neg q$ seja verdadeira em t_3? Ora, essa fórmula é uma conjunção; ela será verdadeira se os dois elementos forem. Bem, obviamente $V(Hp, t_3) = \mathbf{V}$, pois p é verdadeira em todos os instantes anteriores a t_3. Contudo, $V(\neg q, t_3) = \mathbf{F}$, já que q é verdadeira em t_3.

Concluímos que $V(Hp \wedge \neg q, t_3) = \mathbf{F}$.

Para encerrar esta série de exemplos, um envolvendo mais de um operador temporal.

Exemplo 2.5. Qual o valor de HFq em t_5?

Pela cláusula (i) da definição 2.3, $V(HFq, t_5) = \mathbf{V}$ se e somente se Fq for verdadeira em todo instante t' tal que $t' \prec t_5$. Agora, é fácil ver que isso é o caso. Como q é verdadeira em t_6, em *qualquer* instante t' anterior a t_6 teremos: existe um instante posterior a t' (que é t_6, claro!) em que q é verdadeira. Assim, Fq é verdadeira em todo o passado de t_6 — o que inclui o instante t_5. Assim, $V(HFq, t_5) = \mathbf{V}$.

Para ver se você compreendeu bem isso tudo, vamos a alguns exercícios.

Exercício 2.3. Determine o valor que as fórmulas a seguir obtêm no instante t_4 do modelo $\mathfrak{M}_1$ acima apresentado. Faça depois o mesmo com t_7.

(a) $F(p \land \neg q)$
(b) $Gp \to p$
(c) $Fp \land P\neg p$
(d) $H(p \land \neg p)$
(e) $Gp \leftrightarrow G\neg p$
(f) $Pp \to \neg PFp$
(g) $GH\neg q$

2.4 Validade e consequência lógica

Agora que definimos estruturas temporais, modelos e mostramos como determinar o valor de verdade de uma fórmula qualquer em um instante de um modelo, é chegado o momento de verificar que lógica temporal vamos obter. Ou seja, que fórmulas serão válidas? Como definiremos a noção de consequência lógica?

Comecemos pela noção de validade. Recorde que, no **CPC**, definimos validade como “verdade em todas as valorações”. Isso porque lá nossas valorações eram nossos modelos. Aqui a noção de modelo é mais complexa: temos uma estrutura temporal (um conjunto de instantes e uma relação de ordenação) e uma valoração.

A ideia intuitiva de uma fórmula válida é a de uma fórmula que é verdadeira em qualquer situação. No nosso caso, quais seriam as situações? Ora, podemos dizer que são os instantes de nossos modelos. Assim, uma fórmula será válida se for *verdadeira em todos os instantes de todos os modelos*. A definição a seguir torna isso oficial:

Definição 2.4. Seja α uma fórmula de $\mathscr{L}_T$. Dizemos que:

(a) α é *válida* (o que indicamos por $\vDash \alpha$), se para todo modelo $\mathfrak{M} = \langle T, \prec, V\rangle$ e todo instante $t \in T$, $V(\alpha, t) = \mathbf{V}$;
(b) α é uma *contradição* se, para todo modelo $\mathfrak{M} = \langle T, \prec, V\rangle$ e todo instante $t \in T$, $V(\alpha, t) = \mathbf{F}$;
(c) α é uma *contingência* se não for nem válida nem uma contradição.

Antes, contudo, uma observação importante. Recorde que nossos modelos são pares $\langle \mathfrak{T}, V\rangle$, em que $\mathfrak{T} = \langle T, \prec\rangle$ é uma estrutura temporal. Como veremos depois, o conjunto de fórmulas válidas vai depender de que tipo de estrutura temporal se trata. Uma mesma estrutura dá origem a muitos modelos — basta variarmos a valoração.

As fórmulas que serão válidas aqui então são aquelas válidas em qualquer tipo de estrutura temporal. Esse conjunto de fórmulas válidas caracteriza uma lógica temporal minimal chamada $\mathbf{K}_t$, que foi introduzida por E. J. Lemmon. $\mathbf{K}_t$ é dita *minimal* porque é o menor conjunto de fórmulas válidas (de acordo com a semântica que apresentamos aqui); as demais lógicas temporais de que ainda vamos falar são todas extensões de $\mathbf{K}_t$.

Mas enfim, dada essa definição de validade, quais fórmulas teremos como válidas, se considerarmos a classe de todas as estruturas temporais? Obviamente todas as tautologias são válidas, pois continuamos estendendo a lógica proposicional clássica. Assim, nem só as tautologias como

$$p \vee \neg p,$$
$$\neg(p \wedge \neg p),$$
$$\neg p \to (p \to q),$$

são válidas, mas também fórmulas contendo operadores temporais que, mesmo assim, são tautologias, como

$$Fp \vee \neg Fp,$$
$$\neg(Pp \wedge \neg Pp),$$
$$\neg Hp \to (Hp \to Gq).$$

A pergunta é: que fórmulas que não sejam instâncias de tautologias, como as acima, são mesmo assim válidas? O que ganhamos em termos de novas fórmulas válidas?

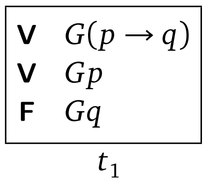
Por exemplo, as fórmulas a seguir são todas válidas:

(a)	$Gp \leftrightarrow \neg F\neg p$	(h)	$Hp \leftrightarrow \neg P\neg p$
(b)	$Fp \leftrightarrow \neg G\neg p$	(i)	$Pp \leftrightarrow \neg H\neg p$
(c)	$G(p \to q) \to (Gp \to Gq)$	(j)	$H(p \to q) \to (Hp \to Hq)$
(d)	$(Gp \vee Gq) \to G(p \vee q)$	(k)	$(Hp \vee Hq) \to H(p \vee q)$
(e)	$F(p \wedge q) \to (Fp \wedge Fq)$	(l)	$P(p \wedge q) \to (Pp \wedge Pq)$
(f)	$G(p \wedge q) \leftrightarrow (Gp \wedge Gq)$	(m)	$H(p \wedge q) \leftrightarrow (Hp \wedge Hq)$
(g)	$F(p \vee q) \leftrightarrow (Fp \vee Fq)$	(n)	$P(p \vee q) \leftrightarrow (Pp \vee Pq)$

Os casos (a), (b), (h) e (i) já eram nossos conhecidos dos quadrados de oposição. As demais fórmulas são válidas, mas não são tautologias. Note agora algo curioso: há uma espécie de semelhança entre as colunas da esquerda e da direita. Se tomarmos uma fórmula, como (c), e trocarmos as ocorrências dos operadores futuros por operadores passados, o resultado é (j).

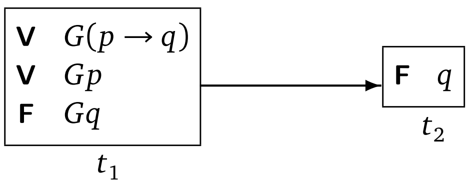
Mas tomemos uma dessas fórmulas como exemplo, tentando mostrar que é de fato válida: a fórmula $G(p \to q) \to (Gp \to Gq)$. Ou seja, se uma implicação $p \to q$ será sempre verdadeira, e seu antecedente também (Gp), então seu consequente também sempre será verdadeiro.

Como mostrar que essa fórmula é válida? Vamos aplicar uma estratégia semelhante aos tablôs semânticos que você viu na *Introdução à lógica*: suponhamos que essa fórmula *não é válida*. Mas se esse é o caso, temos algum instante t_1 de algum modelo em que ela é falsa (pois uma fórmula válida é verdadeira em qualquer instante de qualquer modelo). Mas a fórmula em questão é um condicional falso, o que significa que seu antecedente $G(p \to q)$ é verdadeiro e seu consequente $Gp \to Gq$ falso (o único caso em que um condicional é falso). E visto que o consequente $Gp \to Gq$ é outro condicional, igualmente falso no instante t_1 de nosso suposto modelo, concluímos finalmente que deve haver então um instante t_1 de algum modelo em que $G(p \to q)$ e Gp são verdadeiras, mas em que Gq é falsa. Podemos representar isso graficamente por um diagrama como o seguinte:



Como proceder agora? Note que tanto $G(p \to q)$ quanto Gp são verdadeiras em t_1. Pela nossa definição de verdade, tanto $p \to q$ quanto p são verdadeiras em todos os instantes no futuro de t_1. Mas note que, por enquanto, não temos ainda nenhuma garantia de que haja algum instante posterior a t_1 — este bem pode ser o último instante da história!

Contudo, Gq é falsa em t_1. Assim, não é verdade que q é verdadeira em todos os instantes posteriores a t_1. Deve haver portanto pelo menos algum instante, vamos chamá-lo de t_2, em que q seja falsa. Nosso diagrama passa então a ter dois instantes:



Agora, se $G(p \to q)$ e Gp eram verdadeiras em t_1, $p \to q$ e p tem que ser verdadeiras em todos os instantes posteriores a t_1. No nosso diagrama, o único instante posterior a t_1 é t_2. Assim, temos a seguinte situação:

$$\underset{t_1}{\boxed{\begin{array}{ll} \mathbf{V} & G(p \to q) \\ \mathbf{V} & Gp \\ \mathbf{F} & Gq \end{array}}} \longrightarrow \underset{t_2}{\boxed{\begin{array}{ll} \mathbf{F} & q \\ \mathbf{V} & p \to q \\ \mathbf{V} & p \end{array}}}$$

Tal situação, contudo, não pode ser o caso: se $p \to q$ e p são verdadeiras em t_2, q teria também que ser verdadeira em t_2 — mas é falsa! Portanto, supor que a fórmula $G(p \to q) \to (Gp \to Gq)$ poderia ser falsa leva a um absurdo; assim, ela é válida.

Vejamos agora um exemplo de uma fórmula *mista*, isto é, que combine operadores do passado e do futuro. Considere a fórmula $p \to GPp$. Suponhamos que não seja válida; assim, deveremos ter algum instante, em algum modelo, em que a fórmula é falsa. Graficamente:

$$\underset{t_1}{\boxed{\begin{array}{ll} \mathbf{F} & p \to GPp \end{array}}}$$

Como é um condicional, seu antecedente deve ser verdadeiro e seu consequente falso. Ou seja:

$$\underset{t_1}{\boxed{\begin{array}{ll} \mathbf{F} & p \to GPp \\ \mathbf{V} & p \\ \mathbf{F} & GPp \end{array}}}$$

Note agora que a fórmula GPp recebe valor **F** em t_1. Assim, deve existir algum instante posterior a t_1, digamos, t_2, em que Pp é falsa. Assim:

$$\underset{t_1}{\boxed{\begin{array}{ll} \mathbf{F} & p \to GPp \\ \mathbf{V} & p \\ \mathbf{F} & GPp \end{array}}} \longrightarrow \underset{t_2}{\boxed{\begin{array}{ll} \mathbf{F} & Pp \end{array}}}$$

Agora, se $V(Pp, t_2) = 0$, então não há um instante anterior a t_2 em que p seja verdadeira: isto é, p é falsa em todos os instantes anteriores a t_2. No caso, é falsa em t_1. Temos assim uma contradição, pois p precisaria ser verdadeira e falsa em t_1:

Além da fórmula anterior, vemos facilmente (tente mostrar) que $p \to HFp$ também é válida. E o mesmo vale para $PGp \to p$ e $FHp \to p$.

$$\underset{t_1}{\boxed{\begin{array}{ll} \mathbf{F} & p \to GPp \\ \mathbf{V} & p \\ \mathbf{F} & GPp \\ \mathbf{F} & p \end{array}}} \longrightarrow \underset{t_2}{\boxed{\mathbf{F} \quad Pp}}$$

Outras fórmulas, contudo, serão inválidas. Por exemplo:

(a)	$Gp \to p$	(g)	$Hp \to p$
(b)	$p \to Fp$	(h)	$p \to Pp$
(c)	$Gp \to GGp$	(i)	$Hp \to HHp$
(d)	$FFp \to Fp$	(j)	$PPp \to Pp$
(e)	$Gp \to Fp$	(k)	$Hp \to Pp$
(f)	$GGp \to Gp$	(l)	$HHp \to Hp$

É de se esperar que $Gp \to p$ não seja válida: mesmo que p sempre vá ser o caso, não se segue que já seja o caso *agora*. Se tentássemos construir um diagrama como os anteriores, ficaríamos na seguinte situação:

$$\underset{t_1}{\boxed{\begin{array}{ll} \mathbf{F} & Gp \to p \\ \mathbf{V} & Gp \\ \mathbf{F} & p \end{array}}}$$

Tal situação é perfeitamente cabível: imagine que há uma infinidade de instantes posteriores a t_1 em que p seja verdadeira: assim, $V(Gp, t_1) = \mathbf{V}$. Por outro lado, no próprio t_1 a fórmula p é falsa. Disso se segue que $V(Gp \to p, t_1) = \mathbf{F}$, logo, tal fórmula não é válida.

Analogamente, $Hp \to p$ é inválida. Mesmo que p sempre *tenha sido* verdadeira, não se segue que *continue a ser* verdadeira. Considerações análogas valem para $p \to Fp$ e $Fp \to p$, e para fórmulas similares envolvendo operadores do passado.

Contudo, o que dizer de $FFp \to Fp$? Se FFp é o caso agora (digamos, t_1), então em algum instante futuro t_2 vai ser o caso que Fp, e então p deverá ser o caso em algum instante posterior t_3. Podemos representar isso no diagrama:

$$\underset{t_1}{\boxed{\mathbf{V} \quad FFp}} \longrightarrow \underset{t_2}{\boxed{\mathbf{V} \quad Fp}} \longrightarrow \underset{t_3}{\boxed{\mathbf{V} \quad p}}$$

Não deveria então ser o caso agora, em t_1, que Fp? Afinal, t_3 não está no futuro de t_1?

Intuitivamente, poderíamos pensar que sim — mas recorde que a relação de ordenação temporal é uma relação *qualquer*. Ela pode não ser transitiva, o que significa que, ainda que t_3 esteja no futuro de t_2, e t_2 seja posterior a t_1, não se segue que t_3 está no futuro de t_1.

Recorde que uma relação binária R qualquer é transitiva se e somente se:

$$\forall x \forall y \forall z \left((xRy \land yRz) \to xRz\right).$$

No caso de nossa relação temporal $\prec$, para que ela fosse transitiva precisaria valer o seguinte:

$$\forall t_1 \forall t_2 \forall t_3 \left((t_1 \prec t_2 \land t_2 \prec t_3) \to t_1 \prec t_3\right).$$

Mas não fizemos essa exigência ao apresentar nossas estruturas temporais! Elas são estruturas em que a relação de ordenação é uma relação *qualquer* — que pode muito bem não ser transitiva.

Para que uma fórmula como $FFp \to Fp$ seja válida, então, precisamos exigir de $\prec$ que seja uma relação transitiva. Veremos mais detalhes sobre isso na seção a seguir.

Da mesma forma, $Gp \to Fp$ não deveria ser válida? Se vai ser sempre o caso que p, não deveria ser pelo menos uma vez o caso que p?

A resposta é que não. Talvez o instante em que Gp é verdadeira seja o último instante do tempo: não há nenhum futuro, logo, nenhum futuro em que p seja falsa, logo, Gp é verdadeira — mas Fp é falsa, pois também não haverá nenhum instante futuro em que p seja verdadeira. Não temos aqui ainda nenhuma garantia de que a relação de acessibilidade seja serial na direção do futuro. E no que diz respeito ao passado, pode ser que haja um *primeiro* instante — um instante tal nenhum instante seja anterior a ele. Nesse caso, $Hp \to Pp$ também falha.

Para encerrar as considerações desta seção, precisaríamos definir consequência lógica. A definição é bastante simples:

Definição 2.5. Sejam Γ um conjunto de fórmulas e α uma fórmula de nossa linguagem temporal $\mathscr{L}_T$. Dizemos que α é consequência lógica de Γ (o que escrevemos: $\Gamma \vDash \alpha$) se, para todo modelo $\mathfrak{M}$ e todo instante t nesse modelo, se todas as fórmulas em Γ são verdadeiras em t, então α também é verdadeira em t.

Como você vê, essa é uma generalização da definição de consequência lógica apresentada para o **CPC**: em vez de falarmos da verdade de uma fórmula em uma valoração, falamos da verdade de uma fórmula em um instante de um modelo. A ideia continua sendo aquela de que a verdade das premissas garante a verdade da conclusão.

Exercício 2.4. Tente mostrar, usando diagramas, que as fórmulas válidas listadas acima são mesmo válidas, e que as inválidas são mesmo inválidas.

Exercício 2.5. Encontre outros exemplos de fórmulas válidas e inválidas que tenham operadores de passado e futuro (na mesma fórmula).

2.5 Lógicas temporais

Nesta seção vamos ver alguns exemplos de lógicas do tempo — apenas uns poucos sistemas, os mais conhecidos, para que você tenha uma ideia melhor dessa pluralidade de lógicas. Não vamos demonstrar o fato neste texto, pois isso iria muito além de seu âmbito, mas a verdade é que poderemos ter uma infinidade de sistemas de lógica do tempo.

Apresentaremos os sistemas apenas de uma maneira semântica, dizendo que restrições precisamos colocar na relação de ordenação temporal, e que fórmulas resultam então válidas.

Todas as lógicas temporais que consideraremos neste capítulo são extensões do **CPC**.

2.5.1 O sistema $\mathbf{K}_t$

A lógica temporal minimal, como dissemos acima, é o sistema $\mathbf{K}_t$, introduzida por E. J. Lemmon. $\mathbf{K}_t$ é determinada pela classe de todas as estruturas temporais — não importa quantos elementos T tenha, nem qual seja a relação de ordenação temporal entre os instantes de T. Nesse sentido, $\mathbf{K}_t$ é a mais geral entre as lógicas do tempo de que estamos falando aqui.

Agora, como vimos acima, a relação de ordenação temporal para $\mathbf{K}_t$ é uma relação qualquer, e isso não corresponde à nossa idéia de como é o tempo. Pensamos que os instantes estão organizados em uma ordem linear, sem início nem fim — e, obviamente, transitiva: se $t_1 \prec t_2$ e $t_2 \prec t_3$ então $t_1 \prec t_3$. Mas nem isso exigimos de $\prec$ para $\mathbf{K}_t$.

Vamos ir progressivamente até um sistema de lógica linear como desejamos. Isso será feito colocando mais restrições em como pode ser a relação de ordenação temporal nas estruturas.

2.5.2 O sistema CR

Um primeiro sistema de lógica que estende $\mathbf{K}_t$ é o sistema **CR** introduzido por Nino Cochiarella (em sua tese de doutorado, 1966). **CR** é uma extensão de $\mathbf{K}_t$, ou seja, temos todas as fórmulas válidade de $\mathbf{K}_t$, e ainda mais algumas.

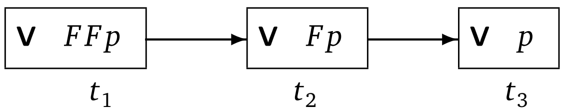
Em **CR**, temos a ideia de que a relação de ordenação temporal é *transitiva*. Ou seja, exigimos de $\prec$ o seguinte:

$$\forall t_1 \forall t_2 \forall t_3 ((t_1 \prec t_2 \land t_2 \prec t_3) \rightarrow t_1 \prec t_3).$$

Em consequência disso, todas as fórmulas da forma abaixo passam a ser válidas:

$$Gp \rightarrow GGp,$$
$$Hp \rightarrow HHp,$$
$$FFp \rightarrow Fp,$$
$$PPp \rightarrow Pp.$$

Vejamos um exemplo, $FFp \rightarrow Fp$. Se FFp é o caso agora (digamos, t_1), então em algum instante futuro t_2 vai ser o caso que Fp, e então p deverá ser o caso em algum instante posterior t_3. Podemos representar isso no diagrama:



Agora, como a relação $\prec$ é transitiva, temos que $t_1 \prec t_3$, do que se segue que Fp é verdadeira em t_1. Logo, se FFp é verdadeira em algum instante, Fp também é — do que se segue que $FFp \rightarrow Fp$ é uma fórmula válida de **CR**.

2.5.3 O sistema CL

Contudo, a transitividade sozinha não garante a linearidade. Se olharmos na figura 2.5 e acrescentarmos transitividade, veremos que mesmo assim o tempo não é linear. Precisamos então acrescentar mais coisas.

Para que tenhamos estruturas lineares, precisamos que ocorra o seguinte. Primeiro, sempre que Fp e Fq são ambas verdadeiras em um instante t_1 qualquer, então uma entre as fórmulas a seguir também tem que ser verdadeira em t_1:

(i) $F(p \land q)$: p e q são verdadeiras em algum instante futuro t_2;

(ii) $F(p \land Fq)$: p é verdadeira em algum instante futuro t_2, e q é verdadeira em um instante t_3 posterior a t_2;

(iii) $F(Fp \wedge q)$: q é verdadeira em algum instante futuro t_2, e p é verdadeira em um instante t_3 posterior a t_2.

Ou seja, precisamos que a fórmula a seguir seja válida:

$$(Fp \wedge Fq) \rightarrow \big(F(p \wedge q) \vee F(p \wedge Fq) \vee F(Fp \wedge q)\big)\,.$$

Isso proíbe que p seja verdadeira em um instante futuro t_2, q verdadeira num outro instante futuro t_3 e tal que não ocorra $t_2 \prec t_3$ nem $t_3 \prec t_2$ (ou seja, que t_2 e $t3$ não estejam temporalmente relacionados um com o outro).

Pela mesma razão, precisamos de algo parecido no que diz respeito ao passado. Nada proibiria que um instante tivesse vários passados diferentes. É necessário que a versão da fórmula acima usando P em vez de F também seja válida, isto é:

$$(Pp \wedge Pq) \rightarrow \big(P(p \wedge q) \vee P(p \wedge Pq) \vee P(Pp \wedge q)\big)\,.$$

No que diz respeito à semântica, exigimos as seguintes condições da relação de ordenação temporal:

$$\forall t_1 \forall t_2 \forall t_3 \,\big((t_1 \prec t_2 \wedge t_1 \prec t_3) \rightarrow (t_2 = t_3 \vee t_2 \prec t_3 \vee t_3 \prec t_2)\big)\,,$$
$$\forall t_1 \forall t_2 \forall t_3 \,\big((t_2 \prec t_1 \wedge t_3 \prec t_1) \rightarrow (t_2 = t_3 \vee t_3 \prec t_2 \vee t_2 \prec t_3)\big)\,.$$

A primeira dessas condições é denominada *linearidade à direita* (ou seja, na direção do futuro). A outra é a *linearidade à esquerda*. Isso corresponde às nossas intuições de que o tempo pode ser ramificado (ou linear) em uma das direções, mas não na outra.

Temos ainda as seguintes fórmulas como exemplo de algumas das fórmulas válidas de **CL**:

(a) $\big(G(p \vee q) \wedge G(p \vee Gq) \wedge G(Gp \vee q)\big) \rightarrow (Gp \vee Gq)$,
(b) $\big(H(p \vee q) \wedge H(p \vee Hq) \wedge H(Hp \vee q)\big) \rightarrow (Hp \vee Hq)$,
(c) $P(Fp \wedge Fq) \rightarrow \big(PF(p \wedge q) \vee PF(p \wedge Fq) \vee PF(Fp \wedge q)\big)$,
(d) $F(Pp \wedge Pq) \rightarrow \big(FP(p \wedge q) \vee FP(p \wedge Pq) \vee FP(Pp \wedge q)\big)$,
(e) $PFp \rightarrow (Pp \vee p \vee Fp)$,
(f) $FPp \rightarrow (Pp \vee p \vee Fp)$,
(g) $(PFp \vee FPp) \rightarrow (Pp \vee p \vee Fp)$,
(h) $(Gp \wedge p \wedge Hp) \rightarrow HGp$,
(i) $(Gp \wedge p \wedge Hp) \rightarrow GHp$,
(j) $(Gp \wedge p \wedge Hp) \rightarrow (HGp \wedge GHp)$.

2.5.4 O sistema SL

Como vimos então, o sistema **CL** exige que os instantes estejam linearmente ordenados. Contudo, isso vale também para linhas que tenham início e fim. Se quisermos que não exista um primeiro instante, ou que não exista um último, ou ambas as coisas, precisamos acrescentar mais axiomas.

Dana Scott apresentou um sistema chamado **SL** que tem justamente essa característica: tempo linear "infinito" em ambas as direções.

A condição na semântica é a *serialidade*:

$$\forall t_1 \exists t_2 (t_1 \prec t_2),$$
$$\forall t_1 \exists t_2 (t_2 \prec t_1).$$

Ou seja, dado qualquer instante t_1, há um instante t_2 que é posterior a t_1. Igualmente, dado qualquer t_1, há um instante t_2 anterior a t_1.

Dadas essas condições, as fórmulas a seguir ficam sendo válidas:

(a) $Gp \to Fp$,
(b) $Hp \to Pp$,
(c) $F(p \to p)$,
(d) $P(p \to p)$.

Algo curioso, agora: note que o fato de não haver um primeiro nem um último momento não garante que tenhamos um número infinito de instantes: se tivermos um conjunto de dois instantes, por exemplo, t_1 e t_2, tal que o seguinte vale:

$$t_1 \prec t_1, \qquad t_1 \prec t_2, \qquad t_2 \prec t_2,$$

teremos um modelo de tempo linear "infinito": o instante anterior a t_1 é o próprio t_1, e o instante posterior a t_2 é o próprio t_2.

Como evitar o caso acima? Intuitivamente, o que queremos é que a cada instante t_1 exista um instante t_2 que seja diferente de t_2, claro! Será que as condições abaixo resolveriam isso?

$$\forall t_1 \exists t_2 (t_1 \prec t_2 \land t_1 \neq t_2),$$
$$\forall t_1 \exists t_2 (t_2 \prec t_1 \land t_1 \neq t_2).$$

É fácil ver que isso não é suficiente: uma estrutura temporal com apenas dois instantes, t_1 e t_2, tal que o seguinte vale,

$$t_1 \prec t_2, \qquad t_2 \prec t_1,$$

satisfaz as condições acima — e continuamos não tendo um conjunto infinito de instantes.

A ideia é que o instante posterior a um certo instante t_1 seja diferente não só de t_1, mas *de todos os instantes anteriores*. Ou seja, para que tivéssemos de fato uma sequência infinita de instantes, evitando círculos, precisaríamos introduzir condições adicionais, tais como a *irreflexividade*:

$$\forall t \neg(t \prec t).$$

Juntando isso às condições anteriores, temos uma classe de estruturas transitivas lineares e irreflexivas.[4]

2.5.5 O sistema PL

Esta é uma extensão de **SL** apresentada por Arthur Prior. Estruturas para **SL** podem incluir, por exemplo, o conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros com a ordem usual — em que o tempo é *discreto* (ou *descontínuo*). Ou seja, dado um instante qualquer, sempre há um próximo instante, e um instante anterior.

Mas podemos também imaginar que a ordem temporal seja *densa* — como estruturas em que a base é o conjunto $\mathbb{Q}$ dos racionais com a ordem usual — e é isso o que temos em **PL**.

Formalmente, a condição de densidade exigida para nossas estruturas temporais corresponde ao seguinte:

$$\forall t_1 \forall t_2 \left(t_1 \prec t_2 \rightarrow \exists t_3 (t_1 \prec t_3 \land t_3 \prec t_2)\right).$$

Em consequência, as fórmulas a seguir são válidas em **PL**:

(a) $GGp \rightarrow Gp$,
(b) $HHp \rightarrow Hp$,
(c) $Fp \rightarrow FFp$,
(d) $Pp \rightarrow PPp$.

2.5.6 O sistema PCr

Este sistema de tempo também foi apresentado por Prior. A ideia é que o tempo seja circular, conforme representado na fig. 2.3.

Para tanto, precisamos que as fórmulas a seguir sejam válidas:

(a) $Gp \rightarrow GGp$,
(b) $Gp \rightarrow p$,

[4] Porém — e esse é um problema interessante no que se costuma chamar *teoria da correspondência* — não há fórmula modal correspondente a essa condição. Mas tais questões envolvem noções bastante avançadas, de que não poderemos nos ocupar neste livro. Você pode ler mais a respeito em Hughes & Cresswell 1996, por exemplo, em particular o cap. 9.

(c) $Gp \to Hp$.

Em **PCr**, G e H são equivalentes, bem como F e P. Ou seja, também as fórmulas

(a) $Gp \leftrightarrow Hp$,
(b) $Fp \leftrightarrow Pp$,

serão válidas. **PCr** é uma lógica de um tempo linear circular, e contém todas as outras lógicas anteriores como subsistemas.

Relações entre todos os sistemas apresentados são as seguintes:

$$\mathbf{K}_t \to \mathbf{CR} \to \mathbf{CL} \to \mathbf{SL} \to \mathbf{PL} \to \mathbf{PCr},$$

em que $\mathbf{K}_t$ é a lógica mais fraca, e **PCr** a mais forte.

Mas esses são apenas alguns dos sistemas temporais; há muitas outras propriedades que não consideramos. Além disso, falamos apenas sobre lógicas temporais proposicionais: e existem versões de primeira ordem de cada um desses sistemas. Esses, contudo, são temas para um outro livro — ou para as leituras adicionais indicadas ao final do capítulo.

2.6 Tempo e determinismo

Com exceção de $\mathbf{K}_t$ e **CR**, as lógicas que vimos acima encorpam a concepção de que o tempo é linear, correspondendo à nossa ideia intuitiva sobre a estrutura do tempo: uma linha reta sem início nem fim ... Isso, contudo, levanta algumas questões que podem problemáticas.

Considere o exemplo aseguir:

(12) Chapecó vai ser a capital de Santa Catarina.

Se usarmos a variável p para a sentença (atemporal) 'Chapecó é a capital de Santa Catarina', a sentença acima seria representada como:

(13) Fp.

Qual seria, agora, seu valor de verdade no momento presente? Se Fp é verdadeira, e o tempo é uma linha, em algum instante do futuro p é verdadeira. Lembremos da definição de verdade:

(14) $V(Fp, t) = \mathbf{V}$ sse existe algum t' tal que $t \prec t'$ e $V(p, t') = \mathbf{V}$.

Mas então parece que já está determinado agora que Chapecó será a capital de Santa Catarina. (Ou que isso nunca acontecerá, se Fp é agora falsa.) Note que o problema é que Fp deve ter *algum* valor de verdade: ou bem há um instante posterior em que p é verdadeira, ou bem p é falsa em todos os instantes posteriores. Em qualquer caso, pareceria que o futuro já está de antemão determinado.

Questões envolvendo tempo e determinismo já tem uma longa tradição na história da filosofia, começando já com os gregos (e falaremos um pouco mais sobre isso no próximo capítulo). Do mesmo modo, os filósofos e teólogos medievais preocupavam-se com questões semelhantes envolvendo a onisciência divina. Supostamente Deus tem conhecimento de tudo — inclusive sobre o que vai acontecer. Contudo, se Deus sabe, agora, que João vai cometer tal ou qual ação, e Deus não se engana, já não estaria determinado, agora, que João vai cometer tal ou qual ação? Como conciliar isso com a ideia de livre arbítrio?

Voltando ao nosso tempo linear, se pararmos para pensar melhor, nossa ideia intuitiva é a seguinte: o passado é imutável, há apenas um passado. Eventos passados já aconteceram e não podem ser mais alterados. Por outro lado, o futuro parece estar em aberto. *Pode ser* que Chapecó venha a ser a capital de Santa Catarina, e *pode ser* que isso não aconteça. Assim, a estrutura temporal não seria uma linha reta, mas algo ramificado em direção ao futuro: não há apenas um futuro, mas vários *futuros possíveis*. Na figura 2.5 que vimos antes você encontra uma representação de tal situação. Dado qualquer instante, o passado é único, mas o futuro sempre está em aberto.

Qual seria a lógica de tal estrutura temporal?

2.6.1 O sistema $\mathbf{K}_b$

K_b é um sistema introduzido por N. Rescher e A. Urquhart (1971). Ao contrário de vários dos sistemas anteriores, é um sistema de tempo não linear. Mais precisamente, temos linearidade à esquerda, ou seja, dado um instante qualquer, há apenas uma história linear que levou até ele. Contudo, ramificações à direita — para o futuro — são permitidas. Uma interpretação intuitiva para isso é que o passado está determinado e é imutável, mas o futuro está aberto: para cada instante podem haver vários futuros possíveis. Isso introduz um elemento modal na interpretação dos operadores F e G.

$\mathbf{K}_b$ é uma extensão do sistema **CR** de tempo transitivo de Cochiarella que vimos na seção anterior, acrescentando-se a exigência de que o passado seja linear (mas não, claro, o futuro).

Em vez das duas condições exigidas para o sistema **CL** (linear), temos apenas uma delas, a saber:

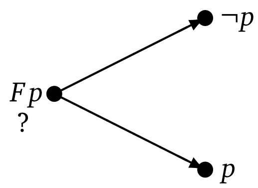
$$\forall t_1 \forall t_2 \forall t_3 \left((t_2 \prec t_1 \land t_3 \prec t_1) \to (t_2 = t_3 \lor t_3 \prec t_2 \lor t_2 \prec t_3) \right).$$

Isso faz com que as fórmulas a seguir sejam válidas:

$$(Pp \land Pq) \to \big(P(p \land q) \lor P(p \land Pq) \lor P(Pp \land q)\big)\,,$$
$$\big(H(p \lor q) \land H(p \lor Hq) \land H(Hp \lor q)\big) \to (Hp \lor Hq),$$

que é o que desejávamos. Por outro lado, as versões das fórmulas acima com F e G no lugar de P e H não são válidas. O tempo não é linear na direção do futuro.

Isso pareceria resolver nosso problema com relação ao determinismo. No entanto, tal modificação faz com que percamos o significado de *vai ser o caso que* anteriormente associado ao operador F. Ao afirmar Fp já não temos garantia de que p *vai* ser verdadeira — apenas que p *poderá* ser verdadeira. É o que temos na situação representada a seguir: o que podemos dizer do valor de Fp no instante à esquerda, se p acontece em um dos futuros possíveis mas não no outro? Se dissermos que Fp é verdadeira, então Fp significa mesmo apenas que p *poderá* ser verdadeira, e nada mais.



Precisamos então de mais um operador a respeito do futuro? É uma ideia. No próximo capítulo, contudo, veremos uma solução diferente para a questão de proposições envolvendo o futuro: uma solução que passa por uma lógica alternativa à lógica clássica.

Leituras recomendadas

Um bom lugar para ler sobre lógica do tempo são as obras originais de Prior, *Time and Modality* (Prior 1957) e *Past, Present and Future* (Prior 1967). Além disso, há várias obras introdutórias à lógica do tempo, por exemplo: Rescher & Urquhart 1971, Lacey 1972, McArthur 1976, Burgess 2002, Burgess 2009, cap. 2.

Reflita sobre

- Para representar aspectos temporais, é melhor usar uma lógica (proposicional) não clássica ou fazer as coisas no cálculo de predicados (clássico) de primeira ordem?

- Em que medida a estrutura temporal influi na validade de fórmulas de nossa linguagem temporal básica?
- Qual lógica do tempo seria a mais adequada? Isso depende de aplicações específicas?
- Semântica para operadores que não são funções de verdade.

Capítulo 3

Lógicas polivalentes

Como o nome diz, lógicas *poli*valentes admitem mais de dois valores de verdade; consequentemente, vamos ter uma rejeição do princípio clássico da bivalência. As lógicas polivalentes surgiram, de modo independente, com os trabalhos do lógico polonês Jan Łukasiewicz, a partir de 1920, e de Emil Post (1921), lógico americano nascido na Polônia. A motivação filosófica que levou Łukasiewicz a propor lógicas polivalentes (inicialmente uma lógica trivalente e, mais tarde, com mais valores) foi o problema dos assim chamados "futuros contingentes" — mais precisamente, a questão de se o princípio de bivalência implicaria o determinismo e, portanto, a não-existência do livre arbítrio.

3.1 Um argumento para o determinismo?

Nesta seção, vamos examinar o argumento apresentado por Łukasiewicz que levaria ao determinismo, para depois ver a solução que ele apresenta. Esta seção está baseada no famoso artigo "On Determinism" (Łukasiewicz 1967; o artigo data de 1922).

Comecemos por um exemplo. Digamos que

(1) João encontrou Maria ao meio-dia de ontem na Praia Mole.

O fato do encontro não existe mais; no entanto, certamente afirmaríamos o seguinte:

(2) É verdadeiro, em todos os instantes do dia de hoje, que João encontrou Maria ao meio-dia de ontem na Praia Mole.

E não só isso. De acordo com nossas intuições, o passado é imutável: algo que aconteceu não pode mais ser "desacontecido". Assim, afirmaríamos ainda que:

(3) É verdadeiro, em qualquer instante posterior ao meio-dia de ontem, que João encontrou Maria ao meio-dia de ontem na Praia Mole.

Deste modo, no caso geral, diz Łukasiewciz, aceitamos que se um objeto a tem a propriedade P no instante t, é verdadeiro em qualquer instante t' posterior a t que a tem a propriedade P no instante t.

A questão que poderíamos colocar agora é a seguinte:

- Era verdadeiro, em qualquer instante *anterior* ao meio-dia de ontem, que João iria encontrar Maria ao meio-dia de ontem na Praia Mole?

Note que estamos falando de qualquer instante t anterior ao meio-dia de ontem: há dois anos atrás, há vinte, antes de João e Maria nascerem, há um milhão de anos atrás ... E colocando isso de outro modo, Łukasiewicz pergunta: "Será que tudo o que vai acontecer e ser verdadeiro em algum instante futuro já é verdadeiro hoje, e sempre foi verdadeiro desde toda a eternidade? Será que toda verdade é eterna?" (Łukasiewicz 1967, p. 22)

Nossas intuições divergem a respeito desse ponto. Um determinista responderia afirmativamente a essas questões; um indeterminista responderia negativamente. Aliás, é assim que Łukasiewicz vai definir o que entender por determinismo (cf. p. 22):

> Determinismo é a crença de que se a é P num instante t, é verdadeiro em qualquer instante t' anterior a t que a é P nesse instante t.

Apresentada essa definição, Łukasiewicz passa a considerar dois argumentos conhecidos desde a Antiguidade que parecem implicar o determinismo: um dos argumentos, que vai nos interessar aqui, é baseado no princípio do terceiro excluído, e já era um argumento conhecido por Aristóteles. O segundo, apenas para mencioná-lo (pois não vamos nos ocupar dele), é baseado no princípio físico da causalidade, e já era conhecido pelos estoicos.

O princípio do terceiro excluído, como você recorda, diz que, dadas uma proposição e sua negação, pelo menos uma delas é verdadeira. Assim, se Pedro diz que

(4) Maria vai estar em casa amanhã ao meio-dia,

e Paulo diz que

(5) Maria não vai estar em casa amanhã ao meio-dia,

então um deles fala a verdade, mesmo que não saibamos isso agora. Se formos visitar Maria amanhã ao meio-dia e ela estiver em casa, Pedro terá falado a verdade e, se não estiver, foi Paulo quem falou a verdade.

Parece, portanto, que ou já é verdade hoje que Maria *vai* estar em casa amanhã ao meio-dia, ou já é verdade hoje Maria *não vai* estar em casa amanhã ao meio-dia: apenas não sabemos qual das alternativas é o caso. E as consequências disso aparentam serem realmente indesejáveis: parece que, afinal de contas, Maria não tem liberdade de escolha sobre estar em casa ou não amanhã ao meio-dia: isso já estaria determinado de antemão. O mesmo vale para qualquer ação futura de Maria — e não só de Maria como de todos nós. Em resumo, achar que temos livre arbítrio, que temos liberdade de escolha, é uma ilusão.

Mas vejamos como procede exatamente esse argumento a favor do determinismo, e qual a sugestão de Łukasiewicz para evitá-lo.

A primeira premissa do argumento, que parece decorrer do princípio do terceiro excluído, seria:

(A) Ou é verdadeiro no instante t que Maria vai estar em casa amanhã ao meio-dia ou é verdadeiro no instante t que Maria não vai estar em casa amanhã ao meio-dia.

A segunda premissa, segundo Łukasiewicz, não é baseada em um princípio lógico, mas pode ser expressa de forma geral no condicional "se é verdadeiro no instante t que p, então p", em que p é uma sentença qualquer. No nosso exemplo, teríamos:

(B) Se é verdadeiro no instante t que Maria não vai estar em casa amanhã ao meio-dia, então Maria não vai estar em casa amanhã ao meio-dia.

E essa premissa aparenta ser intuitivamente verdadeira (cf. Łukasiewicz 1967, p. 25). Contudo, aceitando ambas as premissas, a tese do determinismo se segue, como Łukasiewicz procura demonstrar. Vamos ver como isso é feito.

Para começar, lembremos que a fórmula a seguir,

$$(\alpha \to \neg\beta) \leftrightarrow (\beta \to \neg\alpha),$$

é uma tautologia. Aplicando isso à premissa (B), obtemos:

(C) Se Maria vai estar em casa amanhã ao meio-dia, então não é verdadeiro no instante t que Maria não vai estar em casa amanhã ao meio-dia.

Uma outra tautologia, agora é:

$$(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\neg\beta \to \alpha).$$

E se aplicarmos isso à premissa (A), obtemos:

(D) Se não é verdadeiro no instante t que Maria não vai estar em casa amanhã ao meio-dia, então é verdadeiro no instante t que Maria vai estar em casa amanhã ao meio-dia.

Comparando agora os dois condicionais (C) e (D), vemos que o consequente de (C) é o mesmo que o antecedente de (D). E como você lembra, vale também no **CPC** que:

$$\big((\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma)\big) \to (\alpha \to \gamma).$$

Essa é a chamada "lei do silogismo hipotético", também conhecida como "transitividade do condicional".

De (C) e (D), portanto, concluímos:

(E) Se Maria vai estar em casa amanhã ao meio-dia, então é verdadeiro no instante t que Maria vai estar em casa amanhã ao meio-dia.

Note agora que esse instante t é um instante arbitrário: ele pode ser *posterior* a amanhã ao meio-dia, ou *simultâneo* a amanhã ao meio-dia — ou *anterior*. Assim, diz Łukasiewicz, demonstramos, com base em um exemplo particular, que: se a é P num instante t, é verdadeiro em qualquer instante anterior a t que a é P nesse instante t. O determinismo vale. E como vimos, isso então mostra que o futuro já está predeterminado, que não temos escolha.

Mas isso vai contra nossas intuições — nós achamos que temos livre-arbítrio, que temos escolhas. Alguns fatos a respeito do futuro podem já estar determinados agora — por exemplo, é fácil calcular e ver que a Terra vai estar em certa posição em sua órbita em 4 de novembro do ano que vem — mas outros não (como se Maria vai ou não estar em casa amanhã ao meio-dia). Assim, se nosso argumento nos leva ao determinismo, alguma coisa deve estar errada com ele: ou partimos de premissas que não são verdadeiras, ou cometemos algum erro de raciocínio em algum momento.

Uma solução é a seguinte: estamos rejeitando tanto

(A1) é verdadeiro no instante t que Maria vai estar em casa amanhã ao meio-dia

quanto

(A2) é verdadeiro no instante t que Maria não vai estar em casa amanhã ao meio-dia.

Em consequência, rejeitamos a hipótese (A). Mas note que rejeitar (A) não significa rejeitar o princípio do terceiro excluído, pois (A) não é uma instância desse princípio. Lembre que o princípio diz que "dadas uma proposição e sua negação, pelo menos uma é verdadeira". Mas é claro que (A1) e (A2) não são uma a negação da outra! A negação de (A1), por exemplo, é: "não é verdadeiro no instante t que Maria vai estar em casa amanhã ao meio-dia".

Isso parece ser uma maneira de escapar ao argumento do determinismo. Contudo, Łukasiewicz acha essa solução insatisfatória. Primeiro, por que há uma diferença entre não aceitar (A1) por que não está agora decidido se Maria vai ou não estar em casa amanhã ao meio-dia, e não aceitar (A1) porque já está certo agora que ela *não vai* estar em casa amanhã ao meio-dia. Segundo Łukasiewicz, só no segundo caso teríamos o direito de rejeitar a sentença e dizer que "não é verdade no instante presente que Maria vai estar em casa amanhã ao meio-dia". E isso estaria de acordo com nosso uso coloquial da linguagem. Se não está garantido agora onde Maria vai estar amanhã ao meio-dia, diremos que *é possível* que ela esteja em casa amanhã ao meio-dia, mas também *é possível* que não esteja.

Assim, na hipótese de que a presença ou ausência de Maria de sua casa amanhã ao meio-dia não esteja decidida, não podemos nem aceitar nem rejeitar "é verdadeiro no instante presente que Maria vai estar em casa amanhã ao meio-dia". Mas então não podemos nem aceitar nem rejeitar sua negação, "não é verdadeiro no instante presente que Maria vai estar em casa amanhã ao meio-dia". Dadas essa proposição e sua negação, não aceitamos que pelo menos uma dela seja verdadeira. Mas como representar isso em um sistema de lógica?

A solução apresentada por Łukasiewicz foi a rejeitar também o princípio de bivalência — de que toda proposição seja verdadeira ou falsa. Vejamos como isso funciona.

Exercício 3.1. O que você acha do argumento discutido por Łukasiewicz a respeito do determinismo? Há alguma objeção que você faria contra esse argumento?

3.2 A lógica trivalente de Łukasiewicz

O que Łukasiewicz, que também aceitava a validade do argumento acima apresentado, propôs como solução para o problema é uma lógica trivalente, rejeitando assim o princípio de bivalência. A ideia é ter, além de **V** e **F**, um terceiro valor, **I**, que poderia ser considerado como o *possível* ou *indeterminado*. Note que essa indeterminação é *ontológica*, e não *epistemológica*. Isto é, uma proposição com valor **I** não é, de fato, nem verdadeira nem falsa — ao contrário do caso em que uma proposição é verdadeira (ou falsa), só que não sabemos qual das alternativas é a correta.

Vamos então examinar o sistema de lógica de Łukasiewicz, que chamaremos de $\mathbf{Ł}_3$.

A parte sintática de $\mathbf{Ł}_3$ é bastante simples: temos os mesmos operadores que tínhamos no **CPC**, as mesmas variáveis proposicionais, a mesma definição de fórmula. Nada se altera. A única diferença sintática para a nossa apresentação do **CPC** é que Łukasiewicz utilizou $\neg$ e $\rightarrow$ como operadores primitivos, definindo os demais em função desses (veremos depois como).

A grande mudança, porém, está na semântica, pois temos agora um conjunto de três valores de verdade. Para começo de conversa, isso muda nossa definição de valoração. É claro que uma valoração vai continuar sendo uma atribuição de um valor de verdade às variáveis proposicionais — mas temos agora *três* valores. Em vista disso, temos:

Definição 3.1. Uma valoração V é uma função de VAR no conjunto $\{\mathbf{V}, \mathbf{I}, \mathbf{F}\}$ de valores de verdade.

A segunda mudança é nas tabelas básicas dos operadores. Ao contrário das lógicas temporais, em que os novos operadores não eram funções de verdade, em $\mathbf{Ł}_3$ eles ainda são verofuncionais: a diferença é que eles são funções de verdade *trivalentes*.

Recordemos a tabela da negação para o **CPC**:

	$\neg$
V	**F**
F	**V**

Em $\mathbf{Ł}_3$, a tabela terá uma linha a mais, para considerar o caso em que α é indeterminada:

	$\neg$
V	**F**
I	**I**
F	**V**

Note que uma negação continua sendo falsa, se a fórmula negada é verdadeira, e verdadeira se a fórmula negada for falsa. Agora, como seria de se esperar, se uma fórmula tem o valor indeterminado, sua negação também vai tê-lo.

Vejamos então como ficam os demais operadores. Como dito acima, para Łukasiewicz $\neg$ e $\rightarrow$ eram operadores primitivos; precisamos, assim, especificar a tabela da implicação. Como faremos isso? A estratégia de Łukasiewicz é de estender o caso clássico. Quando α e β tem valores **V** e **F**, o resultado é como no **CPC**. O que temos a mais são os casos em que pelo menos uma das fórmulas — ou ambas — tem o valor indeterminado **I**. Nessas situações, se o valor clássico (**V** ou **F**) de um componente, ou ambos, for suficiente para determinar o valor do todo, isso é feito. Por exemplo, se α tem valor **F**, então $\alpha \rightarrow \beta$ tem valor **V**, não importa qual seja o valor de β. Considerado isto, temos uma primeira aproximação da tabela de uma implicação $\alpha \rightarrow \beta$:

$\to$	**V**	**I**	**F**
V	**V**	?	**F**
I	**V**	?	?
F	**V**	**V**	**V**

Para simplificar, vamos apresentar as tabelas como matrizes: a coluna **V**, **I**, **F**, do lado esquerdo, abaixo do símbolo $\to$, corresponde aos valores de α; a linha superior **V**, **I**, **F**, à direita de $\to$, corresponde aos valores de β. Por exemplo, na segunda linha, quando α é **I** e β é **V**, $\alpha \to \beta$ recebe o valor **V**.

Consideremos agora o caso (primeira linha) em que α é **V** e β é **I**: qual o valor de $\alpha \to \beta$? Ora, β é indeterminada — pensemos que seja uma proposição contingente a respeito do futuro. Se β resultar verdadeira mais adiante, $\alpha \to \beta$ será verdadeira; se β resultar falsa, $\alpha \to \beta$ será falsa. Assim, é razoável dizer que, se α é **V** e β é **I**, então $\alpha \to \beta$ é **I**. Considerações similares aplicam-se ao caso em que α é **I** e β é **F**. Nossa tabela da implicação fica então assim:

$\to$	**V**	**I**	**F**
V	**V**	**I**	**F**
I	**V**	?	**I**
F	**V**	**V**	**V**

Falta apenas preencher o campo central — o caso em que tanto α quanto β têm **I**. Esperaríamos aqui que $\alpha \to \beta$ tivesse valor **I** também, mas não foi isso o que Łukasiewicz fez: nesse caso, ele estipulou que $\alpha \to \beta$ ganha valor **V**.

Mas qual a razão disso? É simples. Łukasiewicz achava que $\alpha \to \alpha$ deveria ser uma fórmula válida (correspondendo ao princípio de identidade), ou seja, deveria receber sempre o valor **V**. Assim, se na tabela acima tivéssemos **I** quando α quanto β têm valor **I**, $\alpha \to \alpha$ teria valor **I** em alguma valoração e não mais seria válida! Essa é a razão da exceção aberta por Łukasiewicz no caso da implicação.

A tabela pronta, então, fica assim:

$\to$	**V**	**I**	**F**
V	**V**	**I**	**F**
I	**V**	**V**	**I**
F	**V**	**V**	**V**

Para completar a apresentação semântica de $\mathbf{Ł}_3$, precisamos ainda das tabelas para os operadores $\wedge$, $\vee$ e $\leftrightarrow$ que, para Łukasiewicz, eram operadores definidos.

A ideia que norteia a construção das tabelas para a conjunção e a disjunção é simples: digamos que **F** seja o *menor* valor, e **V** o *maior*. **I**, claro, é um valor intermediário. No caso clássico, uma conjunção é falsa se um dos elementos o for — ou seja, a conjunção recebe sempre o menor valor que tem seus elementos.

Já uma disjunção recebe o maior valor: se um dos elementos for **V**, a disjunção será **V**. Generalizando essa ideia para uma lógica trivalente, temos as tabelas a seguir para $\wedge$ e $\vee$:

$\wedge$	**V**	**I**	**F**
V	**V**	**I**	**F**
I	**I**	**I**	**F**
F	**F**	**F**	**F**

$\vee$	**V**	**I**	**F**
V	**V**	**V**	**V**
I	**V**	**I**	**I**
F	**V**	**I**	**F**

Como no caso da implicação, você pode ver que essas tabelas são uma extensão das tabelas do caso clássico. Quando α e β tem valores **V** e **F** (o que corresponde aos "cantos" da tabela), o resultado é como no **CPC**. O que temos a mais são as linhas em que pelo menos uma das fórmulas — ou ambas — tem o valor indeterminado **I**.

Para o operador $\leftrightarrow$, biimplicação ou equivalência, Łukasiewicz usou a definição usual, que já encontramos no **CPC**:

$$\alpha \leftrightarrow \beta \quad =_{\text{df}} \quad (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha).$$

A tabela resultante, assim, é:

$\leftrightarrow$	**V**	**I**	**F**
V	**V**	**I**	**F**
I	**I**	**V**	**I**
F	**F**	**I**	**V**

Note que $\alpha \leftrightarrow \beta$ ganha valor **V** quando α e β têm o mesmo valor, como seria de se esperar de uma equivalência.

Como dito, Łukasiewicz usou somente $\neg$ e $\rightarrow$ como operadores primitivos de sua lógica Ł_3; os demais operadores foram definidos. No **CPC**, temos uma conhecida definição de $\wedge$ usando $\neg$ e $\vee$, e foi essa a definição também usada por Łukasiewicz:

$$\alpha \wedge \beta \quad =_{\text{df}} \quad \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta).$$

Precisamos, portanto, apenas de uma definição de $\vee$ em função de $\neg$ e $\rightarrow$. A definição clássica, que vimos no cap. 1, é:

$$\alpha \vee \beta \quad =_{\text{df}} \quad \neg\alpha \rightarrow \beta.$$

Contudo, em função do tratamento diferenciado de $\rightarrow$, tal definição não funcionará em Ł_3. A definição encontrada por Łukasiewicz para $\vee$ foi a seguinte:

$$\alpha \vee \beta \quad =_{\text{df}} \quad (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta.$$

Vamos fazer uma tabela como exemplo, verificando se essa definição de fato corresponde à tabela apresentada acima para $\vee$. A propósito, continuamos usando em **Ł$_3$** a mesma definição de equivalência lógica do **CPC**, a saber: duas fórmulas α e β são *logicamente equivalentes* se e somente se, para toda valoração V, $V(\alpha) = V(\beta)$.

Vamos então ver se, por exemplo, $p \vee q$ e $(p \to q) \to q$ de fato são equivalentes. Temos apenas duas variáveis, p e q: quantas linhas terá nossa tabela?

Você deve recordar (e se não reveja o cap. 9 da *Introdução à lógica*) que o número de linhas l de uma tabela de verdade, no **CPC**, era dado pela equação

$$l = 2^k,$$

em que k é o número de variáveis proposicionais ocorrendo na fórmula. E 2 corresponde ao número de valores de verdade. Assim, uma tabela para $p \wedge q$ tinha 4 linhas, correspondendo a $l = 2^2 = 4$.

No caso de **Ł$_3$**, temos três valores. A equação correspondente, então, é:

$$l = 3^k.$$

Ou seja, uma tabela para uma fórmula com duas variáveis terá 9 linhas.[1] De resto, para calcular o valor de $(p \to q) \to q$ precisamos primeiro do valor de $p \to q$. O início da tabela fica então assim (para facilitar, estou separando as linhas em grupos de três):

p	q	$p \vee q$	$p \to q$	$(p \to q) \to q$
V	**V**			
I	**V**			
F	**V**			
V	**I**			
I	**I**			
F	**I**			
V	**F**			
I	**F**			
F	**F**			

Na primeira coluna (p) os valores vão se alternando de um em um. No **CPC**, na próxima coluna duplicávamos isso: os valores eram dados de dois em dois (dois **V**, dois **F**), e assim por diante. Mas duplicávamos porque a lógica clássica

[1] Essa ideia pode ser generalizada: podemos ter lógicas com 4 valores de verdade, ou 5 etc. No caso geral de termos n valores de verdade, o número de linhas l de uma tabela será dado pela equação $l = n^k$, em que n é o número de valores de verdade e k o número de variáveis proposicionais ocorrendo na fórmula.

é bivalente. Aqui temos três valores, assim, cada coluna subsequente vai *triplicar* o que tinha sido feito antes: três **V**, três **I**, três **F**. É o que se vê na coluna correspondente a q.[2]

Agora é só calcular e preencher as colunas restantes, usando as tabelas básicas dos operadores em $\mathbf{Ł}_3$. O resultado é:

p	q	$p \vee q$	$p \to q$	$(p \to q) \to q$
V	**V**	**V**	**V**	**V**
I	**V**	**V**	**V**	**V**
F	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**I**	**V**	**I**	**V**
I	**I**	**I**	**V**	**I**
F	**I**	**I**	**V**	**I**
V	**F**	**V**	**F**	**V**
I	**F**	**I**	**I**	**I**
F	**F**	**F**	**V**	**F**

Observe a tabela e veja que, de fato, as colunas sob as fórmulas $p \vee q$ e $(p \to q) \to q$ são idênticas. Assim, essas fórmulas são de fato logicamente equivalentes em $\mathbf{Ł}_3$.

Por outro lado, podemos mostrar que, ao contrário do que ocorre no **CPC**, em $\mathbf{Ł}_3$ $p \vee q$ e $\neg p \to q$ não são equivalentes. A tabela é:

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$\neg p \to q$
V	**V**	**F**	**V**	**V**
I	**V**	**I**	**V**	**V**
F	**V**	**V**	**V**	**F**
V	**I**	**F**	**V**	**V**
I	**I**	**I**	**I**	**V**
F	**I**	**V**	**I**	**I**
V	**F**	**F**	**V**	**V**
I	**F**	**I**	**I**	**I**
F	**F**	**V**	**F**	**F**

Como você pode ver, na linha 3 a fórmula $p \to q$ tem valor **V**, mas $\neg p \vee q$ tem **F**. E na linha 5 $p \to q$ tem valor **I**, ao passo que $\neg p \vee q$ tem **V**. Assim, essas fórmulas não são logicamente equivalentes, e não podemos definir $\vee$ por meio de $\neg$ e $\to$ como fazíamos no **CPC**.

Exercício 3.2. Mostre que as definições de $\wedge$ e $\leftrightarrow$ também estão corretas, fazendo as tabelas de verdade correspondentes.

[2] Se tivéssemos uma terceira variável na fórmula, r por exemplo, a tabela teria $3^3 = 27$ linhas, e na terceira coluna os valores seriam dados nove a nove: nove **V**, nove **I**, nove **F**. E assim por diante.

3.3 Validade e consequência lógica em Ł_3

Dadas a definição de valoração e as tabelas básicas dos operadores, o resto se segue. Ou seja, podemos manter — ao menos em um primeiro momento — as mesmas definições de tautologia, contradição, contingência, consequência lógica etc., a saber:

Definição 3.2.

(a) Uma fórmula α é *válida* (ou uma *tautologia* de Ł_3), o que indicamos por $\vDash_{\text{Ł}_3} \alpha$, se para toda valoração V, $V(\alpha) = \mathsf{V}$.
(b) α é uma *contradição* se, para toda valoração V, $V(\alpha) = \mathsf{F}$.
(c) α é uma *contingência* se não for nem tautologia nem contradição.
(d) Uma valoração V é *modelo* de um conjunto de fórmulas Γ, o que indicamos por $V \vDash_{\text{Ł}_3} \Gamma$, se, para toda $\gamma \in \Gamma$, $V(\gamma) = \mathsf{V}$.
(e) Uma fórmula α é *conseqüência lógica* de um conjunto de fórmulas Γ, o que indicamos por $\Gamma \vDash_{\text{Ł}_3} \alpha$, se para toda valoração V tal que $V \vDash \Gamma$, $V(\alpha) = \mathsf{V}$.
(f) Duas fórmulas α e β são *logicamente equivalentes* se e somente se, para toda valoração V, $V(\alpha) = V(\beta)$.

As definições, como você pode verificar comparando com o **CPC**, são as mesmas! O que mudou foi, basicamente, a introdução de um terceiro valor de verdade. Mas note que estamos ainda considerando — por exemplo, ao definir consequência lógica — as situações em que, sendo as premissas *verdadeiras*, a conclusão também é *verdadeira*. O valor I não está sendo considerado, ao menos neste primeiro momento.

Dadas essas definições, cabem algumas perguntas, já que Ł_3 é uma lógica alternativa ao **CPC**:

- Todas as fórmulas válidas em Ł_3 também são válidas no **CPC**, ou há divergências?
- Quais tautologias do **CPC** são também tautologias de Ł_3? Perdemos alguma? Ganhamos alguma?
- Há alguma diferença no que diz respeito à noção de consequência lógica?

Começando pela primeira pergunta, é fácil ver que, se alguma fórmula α for válida em Ł_3, então será uma tautologia. Ou seja, o conjunto de fórmulas válidas de Ł_3 é um *subconjunto* do conjunto das tautologias clássicas. Nesse sentido, Ł_3 é um subsistema do **CPC**, ou o **CPC** pode ser considerado uma extensão de Ł_3.

Com relação à segunda questão, vamos ter então algumas diferenças — certas tautologias clássicas não valem em Ł_3.

Comecemos pelos princípios fundamentais. Conforme observado acima, o princípio de identidade continua valendo: $\vDash_{\text{Ł}_3} p \to p$.

Mas o que acontece com o princípio do terceiro excluído, $p \vee \neg p$?

Façamos as contas. A tabela é:

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
V	**F**	**V**
I	**I**	**I**
F	**V**	**V**

Olhando o resultado, é fácil ver que $\alpha \vee \neg\alpha$ não é válida: quando α recebe o valor **I**, o valor de $\neg\alpha$ também é **I**, e o valor de $\alpha \vee \neg\alpha$ será igualmente **I**, como está claro pela tabela acima. E uma vez que fórmulas válidas são definidas como aquelas que sempre têm valor **V**, $p \vee \neg p$ não é válida. Assim, a rejeição da bivalência teve como consequência também a rejeição do terceiro excluído!

Mas isso é mesmo assim? Na lógica clássica, como vimos na seção anterior, a disjunção era definida de outra maneira: no **CPC**, $p \vee q$ e $\neg p \to q$ são equivalentes. Usando essa noção, poderíamos então introduzir, por meio de uma definição, um *outro* operador de disjunção, $\curlyvee$, definido da seguinte forma:

$$\alpha \curlyvee \beta \;=_{\text{df}}\; \neg\alpha \to \beta.$$

Nesse caso, $\alpha \curlyvee \neg\alpha$ será uma tautologia, como você pode verificar — então temos uma espécie de princípio do terceiro excluído. Contudo, o operador definido $\curlyvee$ não tem todas as propriedades da disjunção clássica. No **CPC**, $(p \vee p) \to p$ é uma tautologia. No entanto, $(p \curlyvee p) \to p$ é inválida em **Ł**$_3$ (ver o exercício ao final da seção).

As seguintes tautologias clássicas também não são válidas em **Ł**$_3$:

$$((p \to q) \to p) \to p,$$
$$(p \to (p \to q)) \to (p \to q).$$

Por outro lado, as seguintes valem:

$$p \to (q \to p),$$
$$\neg p \to (p \to q),$$
$$\neg\neg p \to p.$$

Curiosamente, a fórmula a seguir é verdadeira em algumas valorações:

$$(p \vee \neg p) \leftrightarrow (p \wedge \neg p).$$

Isso parece ser mesmo estranho: na lógica clássica, $p \vee \neg p$ é um princípio válido, ao passo que $p \wedge \neg p$ é uma contradição! Como podem ambas ter o mesmo valor em alguma circunstância?

Para a resposta, vejamos o que acontece com $\neg(p \wedge \neg p)$, o princípio de não contradição. A tabela para essa fórmula é:

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$	$\neg(p \wedge \neg p)$
V	**F**	**F**	**V**
I	**I**	**I**	**I**
F	**V**	**F**	**V**

Mas isso é realmente surpreendente! Ainda que estivéssemos preparados para rejeitar o princípio do terceiro excluído, em função da rejeição da bivalência, gostaríamos de manter o princípio de não contradição. Mas se definimos uma contradição como uma fórmula que é sempre falsa, então $p \wedge \neg p$ não seria, em $Ł_3$, uma contradição. Quando p tem o valor **I**, tanto $p \vee \neg p$ quanto $p \wedge \neg p$ acabam tendo o valor **I**. E, nessa situação, são equivalentes.

Será, então, que não há contradições em $Ł_3$?

É claro que há. Por exemplo, $p \rightarrow p$ é válida (tem valor **V** em todas as valorações), logo, sua negação, $\neg(p \rightarrow p)$, terá **F** em todas as valorações, sendo portanto uma contradição. Analogamente, a negação de qualquer fórmula válida será uma contradição. O que acontece é que, ao contrário do **CPC**, uma fórmula da forma $\alpha \wedge \neg\alpha$ *não é* uma contradição, pois há situações em que ela *não é falsa*.

Na verdade, se você parar para pensar um pouco, vai notar que *nenhuma* fórmula que tenha como operadores somente $\neg$, $\wedge$ e $\vee$ será uma contradição — e tampouco será válida. E a razão é simples: numa valoração em que todas as variáveis da fórmula recebem **I**, a fórmula toda recebe **I**. Basta verificar isso olhando as tabelas básicas para esses três operadores: quando α é **I**, sua negação recebe **I**; quando α e β tem ambas **I**, tanto $\alpha \wedge \beta$ quanto $\alpha \vee \beta$ recebem **I**.

Assim, para que uma fórmula seja válida, ou uma contradição, precisa ter pelo menos alguma ocorrência de $\rightarrow$ ou $\leftrightarrow$.

O fato acima — de que $p \wedge \neg p$ não é uma contradição — parece ser uma característica indesejável do sistema $Ł_3$ de Łukasiewicz. Há alguma saída para isso?

Voltemos por um instante à lógica clássica. Lá podemos definir uma tautologia de duas maneiras: ou como uma fórmula que *sempre ganha* **V**, ou, alternativamente, como uma fórmula que *nunca ganha* **F**. E analogamente para as contradições.

Em $Ł_3$, contudo, essas duas maneiras não são equivalentes. Uma fórmula pode nunca ganhar **F** — é o caso de $p \vee \neg p$ — mas nem sempre receber **V**.

Isso sugere introduzir a noção de um *valor designado*, i.e., aquele que corresponde ao "não ser falso". Para que uma fórmula seja uma tautologia, ela precisa receber um valor designado em todas as valorações. Se dissermos que **V** e **I** são valores designados, então, claro, $p \vee \neg p$ passa imediatamente a ser uma tautologia, e o mesmo ocorre com $\neg(p \wedge \neg p)$. Temos de volta o princípio do terceiro excluído e o princípio de não contradição, mas continuamos sem o princípio de bivalência, como desejado.

Poderíamos agora pensar que, se tomarmos **V** e **I** como valores designados, obteremos todas as tautologias da lógica proposicional clássica. Mas isso não é o caso. Consideremos o exemplo (devido ao lógico A. R. Turquette):

$$\neg(p \to \neg p) \vee \neg(\neg p \to p).$$

Essa fórmula é uma tautologia no **CPC**, mas seu valor é **F** quando p toma o valor **I**. Assim, se denotarmos por Ł_3^* o conjunto de fórmulas válidas tomando-se **V** e **I** como designados, veremos que Ł_3^* estende o conjunto de fórmulas válidas em Ł_3, mas ainda é um subconjunto próprio do **CPC**. Ou seja, a situação entre essas lógicas é:

$$\mathbf{Ł}_3 \to \mathbf{Ł}_3^* \to \mathbf{CPC},$$

sendo que Ł_3 é a lógica mais fraca e o **CPC** a mais forte.

Por outro lado, ainda que $\neg(p \wedge \neg p)$ seja uma tautologia, $p \wedge \neg p$ continua não sendo uma contradição! E isso pelo simples fato de não receber **F** em todas as valorações. Precisamos então de um conceito adicional, o de um *valor antidesignado*, correspondendo ao "não ser verdadeiro". Se dissermos agora que **I** e **F** são antidesignados, teremos então $p \wedge \neg p$ como contradição, e sua negação como tautologia.

Note que **I**, nessa situação, é tanto um valor designado quanto antidesignado. Isso não precisa ocorrer em todas as lógicas, claro. Poderíamos ter, digamos uma lógica com 5 valores, de 1 até 5, sendo 1 e 2 designados, e 4 e 5 antidesignados, enquanto 3 não é uma coisa nem outra. Lógicas polivalentes nos dão muitas possibilidades para a construção de sistemas lógicos!

Em termos de nossa versão sintática das lógicas, Ł_3 não foi axiomatizada por Łukasiewicz, mas por Mordchaj Wajsberg, em 1931. O conjunto de axiomas (esquemas) é o seguinte:

$$(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)),$$
$$(\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \alpha),$$
$$((\alpha \to \neg\alpha) \to \alpha) \to \alpha,$$

e única regra de inferência primitiva é *modus ponens*.

Vamos agora a alguns exercícios sobre o que vimos nesta seção.

Exercício 3.3.

(a) Apresente a tabela básica do operador $\curlyvee$, em função da definição apresentada.

(b) Mostre que $\models_{\text{Ł}_3} p \curlyvee \neg p$.

(c) Mostre que $\not\models_{\text{Ł}_3} (p \curlyvee p) \to p$.

Exercício 3.4. Mostre que $\neg(p \to \neg p) \lor \neg(\neg p \to p)$ é uma tautologia clássica, mas que não é válida em $\mathbf{Ł}_3$, nem mesmo se usarmos **V** e **I** como valores designados.

Exercício 3.5. Usando tabelas de verdade trivalentes, determine quais das seguintes fórmulas são válidas em $\mathbf{Ł}_3$. Alguma das inválidas seria válida, se o valor **I** também fosse designado?

(a) $p \lor \neg p$
(b) $(p \to \neg\neg p) \land (\neg\neg p \to p)$
(c) $\neg(p \land \neg p)$
(d) $(p \land q) \to (q \land p)$
(e) $\neg(p \lor q) \to (\neg p \land \neg q)$
(f) $(p \lor \neg p) \to (\neg\neg p \to p)$
(g) $(p \to q) \to \neg(p \land \neg q)$
(h) $\neg((\neg p \to \neg q) \to \neg q) \to (p \land q)$
(i) $\neg((\neg p \to \neg q) \to \neg q) \to (p \lor q)$

3.4 A lógica trivalente de Kleene

Um outro sistema de lógica proposicional trivalente foi apresentado por S. C. Kleene em 1938.[3] A motivação foi a existência de predicados matemáticos não totalmente definidos; digamos, por exemplo, que definamos um predicado de números reais P da seguinte maneira:

$$Px \quad =_{\text{df}} \quad 1 \leq \frac{1}{x} \leq 2,$$

É fácil ver que $1 \leq \frac{1}{x} \leq 2$ é verdadeira quando $x = 1$, mas é falsa quando $x = -1$. Por outro lado, não tem valor algum se $x = 0$, visto que não há divisão por zero. A proposta de Kleene é que nesse caso a afirmação receba um terceiro valor **I**, não um valor intermediário como em Łukasiewicz, mas representando o *matematicamente indecidível*.

Vamos denominar $\mathbf{K}_3$ a lógica de Kleene. As matrizes de Kleene são construídas de acordo com a seguinte orientação: se o valor clássico de um componente é suficiente para decidir o valor clássico de uma fórmula complexa, a fórmula toma esse valor, ainda que tenha outras partes indecidíveis. Caso contrário, o composto todo é indecidível

Assim, as matrizes para $\mathbf{K}_3$ são quase as mesmas de Łukasiewicz, com uma única diferença no caso de $\alpha \to \beta$, que pode ser definida do modo usual como $\neg\alpha \lor \beta$:

[3] Cf. Kleene 1938; ver também a apresentação feita em Kleene 1952, p. 332–40.

	$\neg$
V	**F**
I	**I**
F	**V**

$\wedge$	**V**	**I**	**F**
V	**V**	**I**	**F**
I	**I**	**I**	**F**
F	**F**	**F**	**F**

$\vee$	**V**	**I**	**F**
V	**V**	**V**	**V**
I	**V**	**I**	**I**
F	**V**	**I**	**F**

$\rightarrow$	**V**	**I**	**F**
V	**V**	**I**	**F**
I	**V**	**I**	**I**
F	**V**	**V**	**V**

$\leftrightarrow$	**V**	**I**	**F**
V	**V**	**I**	**F**
I	**I**	**I**	**I**
F	**F**	**I**	**V**

A lógica de Kleene, a propósito, não tem fórmulas válidas, como é fácil verificar: quando todas as variáveis proposicionais em uma fórmula têm o valor **I**, a fórmula como um todo recebe também **I**, e portanto não é válida. Assim, uma das maneiras anteriormente mencionadas para caracterizar uma lógica (um conjunto de fórmulas válidas) não funciona para a lógica trivalente de Kleene.

Por outro lado, podemos ainda definir uma noção de consequência lógica da maneira usual. Repetimos aqui a definição dada para o **CPC**:

Definição 3.3.

(a) Uma valoração V é *modelo* de um conjunto de fórmulas Γ, o que indicamos por $V \vDash_{\mathbf{K}_3} \Gamma$, se, para toda $\gamma \in \Gamma$, $V(\gamma) = \mathbf{V}$.

(b) Uma fórmula α é *conseqüência lógica* de um conjunto de fórmulas Γ, o que indicamos por $\Gamma \vDash_{\mathbf{K}_3} \alpha$, se para toda valoração V tal que $V \vDash_{\mathbf{K}_3} \Gamma$, $V(\alpha) = \mathbf{V}$.

Para um exemplo, vamos verificar que $p \rightarrow q \vDash_{\mathbf{K}_3} \neg q \rightarrow \neg p$:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$\neg q \rightarrow \neg p$
V	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**
I	**V**	**I**	**F**	**V**	**V**
F	**V**	**V**	**F**	**V**	**V**
V	**I**	**F**	**I**	**I**	**I**
I	**I**	**I**	**I**	**I**	**I**
F	**I**	**V**	**I**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**V**	**F**	**F**
I	**F**	**I**	**V**	**I**	**I**
F	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**

Se você observar a tabela acima, verá que, em todas as linhas em que $p \rightarrow q$ tem valor **V**, $\neg q \rightarrow \neg p$ também tem o valor **V**. Portanto, $\neg q \rightarrow \neg p$ é consequência lógica de $p \rightarrow q$. Contudo, ao contrário do que acontecia no **CPC** e também em $\mathbf{Ł}_3$, a fórmula $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ não é válida.

Exercício 3.6. Se $\mathbf{K}_3$ não tem fórmulas válidas, o que acontece com as contradições? Você consegue encontrar algum exemplo de uma contradição em $\mathbf{K}_3$? Por quê?

3.5 A lógica trivalente de Bochvar

Também o lógico russo D. A. Bochvar propôs, em 1939, uma lógica trivalente, em que **I** é o valor "sem sentido" ou "paradoxal". A motivação para isso é tratar do valor de verdade de sentenças paradoxais como o conhecido Paradoxo do Mentiroso, que pode ser formulado da seguinte maneira:

(λ) Esta sentença é falsa.

Se você procurar determinar se (λ) tem valor **V** ou **F**, chegará a um impassse. Se (λ) for verdadeira, então o que ela afirma deve ser o caso — seguindo a máxima aristotélica de que "é verdadeiro dizer do que é, que é". O que (λ) afirma é que ela própria é falsa: ser for verdade o que diz, então (λ) é falsa. Mas isso não pode ser! Portanto, (λ) tem que ser falsa. Mas se (λ) for falsa, então o que ela afirma é o caso — do que se segue que, afinal, (λ) é verdadeira. Mas não pode ser verdadeira! E também não pode ser falsa!

A solução de Bochvar é introduzir esse terceiro valor, **I**, que representa algo paradoxal ou sem sentido. O valor de (λ), assim, não seria nem **V** nem **F**, mas **I**.

Que lógica resulta disso?

Tomando negação e conjunção como primitivos, os operadores concordam com a lógica bivalente apenas quando **V** e **F** estão envolvidos; em todos os outros casos a fórmula fica com **I** quando um de seus elementos tem **I**. Em certo sentido, **I** é um valor "infeccioso": basta um elemento de uma fórmula tomar esse valor para que ela toda tome o valor **I**.

Bochvar definiu os outros operadores, $\vee$, $\to$ e $\leftrightarrow$, da maneira clássica usual, ou seja, usando as seguintes definições:

$$\begin{aligned}
\alpha \vee \beta &=_{\text{df}} \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta), \\
\alpha \to \beta &=_{\text{df}} \neg(\alpha \wedge \neg\beta), \\
\alpha \leftrightarrow \beta &=_{\text{df}} (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha).
\end{aligned}$$

Em consequência disso, as tabelas do sistema $\mathbf{B}_3$ de Bochvar são:

	$\neg$
V	**F**
I	**I**
F	**V**

$\wedge$	**V**	**I**	**F**
V	**V**	**I**	**F**
I	**I**	**I**	**I**
F	**F**	**I**	**F**

$\vee$	**V**	**I**	**F**
V	**V**	**I**	**V**
I	**I**	**I**	**I**
F	**V**	**I**	**F**

$\to$	**V**	**I**	**F**
V	**V**	**I**	**F**
I	**I**	**I**	**I**
F	**V**	**I**	**V**

$\leftrightarrow$	**V**	**I**	**F**
V	**V**	**I**	**F**
I	**I**	**I**	**I**
F	**F**	**I**	**V**

À semelhança do sistema de Kleene, não há tautologias (nem contradições) no sistema de Bochvar — uma vez que uma fórmula tenha alguma parte com valor **I**, a fórmula toda obtém **I**. Isso nos leva mais uma vez à noção de valores *designados* e *antidesignados*, e um certo valor (**I**, por exemplo) pode ser ambas as coisas. Se definirmos então uma tautologia como uma fórmula que nunca leva **F** — ou seja, se considerarmos **V** e **I** como valores designados — as fórmulas válidas de $\mathbf{B}_3$ são as tautologias clássicas. Mas continuaremos sem contradições, pois há casos em que $p \wedge \neg p$ não fica com **F**. Teríamos que definir uma contradição como uma fórmula que nunca é verdadeira (valor **V**), ou seja, considerar **I** também como antidesignado.

Bochvar estende seu sistema fazendo uma diferença entre dois modos de *asserção*: interna e externa. Essa última é feita por meio de um novo operador na linguagem, o operador de asserção A, cuja tabela é a seguinte:

α	$A\alpha$
V	**V**
I	**F**
F	**F**

Poderíamos dizer que $A\alpha$ significa algo como ‘afirma-se α’, ‘α é verdadeira’. É fácil então perceber a justificação da tabela acima: se α é verdadeira, então afirmar α também. Mas se α não é verdadeira, isto é, é indeterminada ou falsa, é falso dizer que estamos afirmando α.

Dispondo do operador A de asserção externa, podemos então definir conetivos externos da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
\urcorner\,\alpha &=_{\mathrm{df}} \neg A\alpha,\\
\alpha \Wedge \beta &=_{\mathrm{df}} A\alpha \wedge A\beta,\\
\alpha \Vee \beta &=_{\mathrm{df}} A\alpha \vee A\beta,\\
\alpha \Rightarrow \beta &=_{\mathrm{df}} A\alpha \rightarrow A\beta,\\
\alpha \Leftrightarrow \beta &=_{\mathrm{df}} A\alpha \leftrightarrow A\beta.
\end{aligned}
$$

Usando as definições acima, e a tabela do operador de asserção A, chegamos às matrizes seguintes para o sistema estendido de Bochvar — vamos denominá-lo $\mathbf{B}_3^{\mathrm{E}}$:

	$\urcorner$
V	**F**
I	**F**
F	**V**

$\Wedge$	**V**	**I**	**F**
V	**V**	**F**	**F**
I	**F**	**F**	**F**
F	**F**	**F**	**F**

$\Vee$	**V**	**I**	**F**
V	**V**	**V**	**V**
I	**V**	**F**	**F**
F	**V**	**F**	**F**

$\Rightarrow$	**V**	**I**	**F**
V	**V**	**F**	**F**
I	**V**	**V**	**V**
F	**V**	**V**	**V**

$\Leftrightarrow$	**V**	**I**	**F**
V	**V**	**F**	**F**
I	**F**	**V**	**V**
F	**F**	**V**	**V**

Podemos mostrar que $\alpha \Wedge \urcorner\,\alpha$ é sempre falsa, e que tanto $\urcorner(\alpha \Wedge \urcorner\,\alpha)$ quanto $\alpha \Vee \urcorner\,\alpha$ são sempre verdadeiras. E dadas α e $\urcorner\,\alpha$, uma será verdadeira e a outra falsa. Podemos mostrar também que todas as tautologias do **CPC** são válidas em $\mathbf{B}_3^{\mathrm{E}}$, e todas as fórmulas válidas que só contenham ocorrências operadores externos são tautologias. Em certo sentido, então, o sistema de Bochvar contém a lógica proposicional clássica.

Note que este último fato é curioso. $\mathbf{B}_3^{\mathrm{E}}$ não era uma lógica *alternativa* à lógica proposicional clássica? Em certo sentido, sim — se considerarmos apenas os operadores usuais $\neg$, $\wedge$ etc. Mas $\mathbf{B}_3^{\mathrm{E}}$ não tem somente esses operadores; tem também $\urcorner$, $\Lleftarrow$ etc. Assim, a linguagem de $\mathbf{B}_3^{\mathrm{E}}$ é mais expressiva. Todas as tautologias do **CPC**(se reescritas usando os operadores $\urcorner$ etc.) são válidas em $\mathbf{B}_3^{\mathrm{E}}$; além disso, $\mathbf{B}_3^{\mathrm{E}}$ tem ainda outras fórmulas válidas. Deste modo, $\mathbf{B}_3^{\mathrm{E}}$ acaba sendo uma extensão do **CPC**!

O que concluímos disso é que nem sempre é fácil dizer se uma lógica é complementar ou alternativa. Isso vai depender, por exemplo, da linguagem dos sistemas lógicos que estejamos comparando.

Para encerrar esta seção, voltemos à motivação inicial de Bochvar ao introduzir um terceiro valor de verdade: resolver problemas como o do Paradoxo do Mentiroso. Contudo, mesmo com três valores o paradoxo pode ser reintroduzido — é o chamado "Mentiroso Reforçado". Considere a afirmação abaixo:

(λ^*) Esta sentença é falsa ou paradoxal.

Fica como exercício para você mostrar que (λ^*) conduz a um paradoxo.

Exercício 3.7. Mostre que as fórmulas abaixo não são válidas em $\mathbf{B}_3$, mas que, se trocarmos os operadores por suas versões externas ($\rightarrow$ por $\Rightarrow$ etc.), as fórmulas resultantes são válidas em $\mathbf{B}_3^{\mathrm{E}}$:

(a) $p \vee \neg p$
(b) $(p \rightarrow \neg\neg p) \wedge (\neg\neg p \rightarrow p)$
(c) $\neg(p \wedge \neg p)$
(d) $(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge p)$
(e) $\neg(p \vee q) \rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
(f) $(p \vee \neg p) \leftrightarrow (\neg\neg p \rightarrow p)$
(g) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

Leituras recomendadas

Você pode ler o capítulo 11 de Haack 2002, que trata de algumas lógicas polivalentes e suas motivações filosóficas. Para um tratamento mais extenso, em inglês, recomendo muito o livro de Nicholas Rescher, *Many-valued logic* (Rescher 1969). Uma introdução contemporânea (em inglês) você encontra no artigo Urquhart 2002.

Reflita sobre

- Pode-se tirar uma consequência como o determinismo somente a partir de princípios lógicos?
- Motivações para rejeitar o princípio de bivalência: futuros contingentes, predicados indecidíveis, sentenças paradoxais.
- As diferentes possibilidades de fazer as tabelas básicas para os operadores (como vistos nos sistemas de Łukasiewicz, Kleene, Bochvar).
- O sentido de fazer uma distinção entre lógicas alternativas e complementares, em vista de sistemas como a lógica $\mathbf{B}_3^E$ de Bochvar.

Capítulo 4

Algumas questões filosóficas sobre a lógica

Nos capítulos anteriores vimos exemplos de sistemas lógicos. Por um lado, a lógica clássica em sua versão proposicional, o **CPC**; por outro, vimos também alguns sistemas de lógica não clássica, lógicas que procuram estender a lógica clássica ou mesmo substituí-la. Neste capítulo, vamos examinar algumas questões sobre o estatuto da própria lógica suscitadas pela existência de uma variedade de sistemas lógicos.

4.1 Há mais de uma lógica?

A existência de mais do que apenas um sistema de lógica suscita algumas questões interessantes — em particular o fato de que vários desses outros sistemas pretendam ser alternativas à lógica clássica. Serão eles mesmo lógicas? Se forem, são realmente alternativas? E se temos alternativas, qual delas devemos então escolher? E com base em que razões?

Vamos conversar um pouco sobre tais questões neste capítulo. Antes de nos ocuparmos disso, porém, é preciso esclarecer uma questão preliminar: há realmente *mais de uma* lógica?

Essa é uma questão que parece ter uma resposta óbvia. Não há como negar a pluralidade de sistemas lógicos. Vimos alguns exemplos de lógicas não clássicas, tanto complementares quanto alternativas — várias lógicas do tempo, várias lógicas polivalentes — mas ainda há muito mais: inumeráveis sistemas de lógica modal, lógica epistêmica, lógica deôntica, lógica dinâmica (para falar de extensões da lógica clássica), mas tambem a lógica intuicionista, as lógicas da relevância, lógicas paraconsistentes (para citar mais alguns exemplos de lógicas alternativas).

Assim, obviamente, existe uma infinidade de sistemas formais denominados "lógicas". Alguns autores, porém, mesmo reconhecendo a existência desses sistemas formais, negam que tais sistemas sejam *lógicas*: ele seriam apenas formalismos, sistemas de símbolos, até formalismos "logicóides" — mas nada além disso. Lógica, mesmo, só haveria uma (provavelmente a clássica). Nesse sentido, precisaríamos primeiro estabelecer como legítima a pretensão dos outros sistemas lógicos de serem, de fato, *lógicas*.

Os fundadores das lógicas não clássicas — como Łukasiewicz, Vasiliev, Post, Lewis — assimilaram a existência da diversidade de sistemas lógicos à existência de geometrias não euclidianas. A ideia fundamental, então, era a de construir *lógicas não aristotélicas*, já que a lógica clássica incorporava os princípios fundamentais da lógica de Aristóteles.

Você sabe que existem vários sistemas de geometria: a geometria de Euclides, a de Lobachevski, a de Riemann ... O que aprendemos na escola é a geometria euclidiana. Nessa geometria valem coisas como:

(a) a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180 graus;
(b) dada uma reta R num plano, e um ponto P fora de R, existe uma única linha reta paralela a R que passa por P.

Em outras geometrias, tais coisas são diferentes. Na geometria de Lobachevski, por exemplo, a soma dos ângulos internos de um triângulo é *menor* do que 180 graus, e pode-se traçar *infinitas* retas passando por P que sejam paralelas a R; na geometria de Riemann, por outro lado, a soma dos ângulos internos de um triângulos é *maior* do que 180 graus, e não há *nenhuma* linha reta passando por P que seja parela a R. Tais geometrias são denominadas *não euclidianas*, já que conflitam com a geometria de Euclides. Ainda que tenham resultados bastante anti-intuitivos (como assim, não se pode traçar nenhuma paralela? ou pode-se traçar infinitas?), a verdade é que tais sistemas são tão consistentes quanto a geometria de Euclides. Em termos de sistemas formais, todos os três encontram-se no mesmo patamar; todos os três são geometrias; nenhum deles é, desse ponto de vista, melhor do que os outros.

Mas o que faz com que um certo sistema formal seja uma *geometria* e não outra coisa? Ora, é preciso que haja uma *interpretação* desse sistema segundo a qual certos símbolos representem noções geométricas intuitivas: pontos, retas, planos e assim por diante.

A analogia aqui é que, se do ponto de vista formal não há razão para preferir uma geometria sobre outra, então, do ponto de vista formal, não há igualmente razão para preferir uma lógica em detrimento de outra. A questão para as geometrias só se coloca no caso de sistemas geométricos fisicamente interpretadas: qual a geometria do espaço físico? Uma geometria só pode ser dita correta com relação ao nosso espaço físico se descrevê-lo adequadamente. As demais geometrias descrevem espaços possíveis (mas não o espaço real).

A questão para as lógicas é similar: não pode haver uma "lógica pura", não interpretada. Há muitos sistemas formais: o que distingue um deles como lógica — em vez de ser uma axiomatização de alguma teoria matemática, física ou o que seja — é o haver algum tipo de interpretação (semântica) ao modo usual.

Voltamos assim à difícil questão: o que é uma lógica? O que faz com que um sistema formal seja uma lógica?

Note que não basta dizermos que temos um sistema formal em que certas expressões podem ser obtidas sintaticamente a partir de outras, ou que temos um conjunto de fórmulas que são teoremas de um sistema, ou que temos um conjunto de fórmulas definidos por algum tipo de interpretação formal (semântica formal). É preciso mais que isso, uma semântica informal, aplicada (cf. Plantinga 1974).

Que uma semântica puramente formal não basta você pode ver lembrando como definimos modelos para nossas lógicas do tempo: um modelo consiste em uma estrutura temporal e uma valoração. E uma estrutura temporal? Ora, um conjunto não vazio de coisas que denomimanos "instantes" ou "estados do universo". Mas note que, formalmente, o que temos é um conjunto não vazio — *qualquer* conjunto não vazio. Podia ser o conjunto das capitais brasileiras, ou o conjunto das latas de cerveja no supermercado da esquina. Mas se é assim, por que um sistema formal como $\mathbf{K}_t$ seria uma *lógica do tempo*? Ora, porque entre as estruturas temporais possíveis há aquelas em que o conjunto T é mesmo um conjunto de instantes, ou estados do universo, e as variáveis são interpretadas como proposições, etc. Isso, porém, já é o que Plantinga denomina *semântica informal* ou *aplicada*.

Certamente um sistema de lógica tem a ver com a estrutura formal de inferência e raciocínio. Precisamos de uma interpretação envolvendo noções de *significado* e *verdade* de proposições, e relações de *consequência* e *(in)consistência* entre grupos de proposições. Dadas essas condições, um sistema poderá qualificar-se a ser um sistema de lógica.

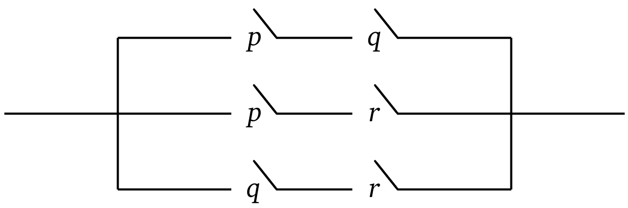
Para que isso fique claro, voltemos à lógica proposicional clássica, apresentada como um sistema formal. E tomemos como exemplo uma fórmula da linguagem do **CPC**, como a seguinte:

(1) $(p \land q) \lor (p \land r) \lor (q \land r)$.

O que "diz" uma tal fórmula? Bem, poderíamos pensar que ela está representando alguma proposição complexa, assim que soubermos que proposições básicas as variáveis p, q e r representam. Mas note que aqui já estamos *interpretando* o sistema: dizendo que as variáveis representam proposições.

Talvez você pergunte agora: mas se não representam proposições, então representam *o quê*?

Considere a seguinte situação: há um comitê de 3 pessoas que toma decisões por maioria apertando-se um botão. Quando pelo menos dois membros do comitê apertam o botão, uma luz acende. Temos então 3 interruptores, uma para cada pessoa. Vamos chamá-los de p, q e r. Em que condições a luz acende? Quando pelo menos dois dos interruptores estiverem ligados: p e q, ou p e r, ou q e r, certo? Representamos isso na figura a seguir:



Note, agora, que a fórmula (1) acima descreve justamente essa situação! Se os interruptores p e q estiverem fechados, a corrente passa. Ou se p e r estiverem fechados, etc. Fórmulas do **CPC**, assim, sob outra interpretação, não representam proposições, mas circuitos elétricos! Aliás, esta é justamente uma grande área de aplicação do cálculo proposicional clássico: desenho de circuitos. A fórmula acima, como se pode facilmente mostrar, é equivalente à seguinte:

(2) $(p \wedge (q \vee r)) \vee (q \wedge r)$.

Mas isso representa outro circuito, mais simples que o original! E como as fórmulas são equivalentes, também o são os circuitos representados.

O que tiramos do exemplo acima é que um sistema formal por si só, sem interpretação, não passa disso: um formalismo que pode representar muita coisa. Um sistema formal só pode ser denominado uma lógica se houver alguma intepretação dele em termos de proposições etc.

Indubitavelmente, o que vimos anteriormente sob o nome de "lógicas" responde a isso. Numa lógica do tempo, as variáveis representam proposições, os operadores representam certos termos lógicos por meio dos quais argumentos em português são representados, há uma relação de consequência lógica entre certas proposições ... Considerações análogas valem para as lógicas polivalentes que vimos. Podemos então dizer, em resumo, que há vários sistemas de lógica.

Mas são eles realmente *alternativas* uns aos outros, ou apenas aparentam sê-lo? O que faz com que sistemas de lógica sejam diversos?

4.2 Há lógicas alternativas?

Parece fácil determinar quando uma lógica é extensão de outra. Consideremos o **CPC** e algum sistema de lógica do tempo, como $\mathbf{K}_t$. A linguagem de $\mathbf{K}_t$ estende a linguagem do **CPC** por meio de novos operadores (temporais). Todas as tautologias do **CPC** são válidas em $\mathbf{K}_t$; além disso, $\mathbf{K}_t$ tem outras fórmulas válidas (como $p \to HFp$). Nesse sentido, $\mathbf{K}_t$ estende o **CPC**.

Quando, porém, são duas lógicas alternativas uma à outra? Para que dois sistemas sejam alternativas genuínas, deve haver algum conflito real entre eles. Conflitos, no entanto, podem ser fracos ou fortes. Dois sistemas conflitam fracamente se um deles afirma α e o o outro não afirma α. Nesse sentido, o **CPC** e $\mathbf{K}_t$ estão num conflito fraco: $\mathbf{K}_t$ afirma $p \to HFp$ como válida, e o **CPC** não.

No sentido forte, dois sistemas conflitam se um deles afirma α e o outro afirma não-α. Isso acontece no caso das geometrias que vimos acima: a geometria euclidiana afirma que a soma dos ângulos internos de um triângulo é *igual* a 180 graus; as outras duas geometrias afirmam que é *diferente* de 180 graus: ou maior ou menor. No caso das lógicas, já fica mais difícil encontrar um exemplo tal que uma lógica o afirme e a outra afirme sua negação.

Consideremos agora um primeiro exemplo conflito entre lógicas alternativas, $\mathbf{Ł}_3$ e o **CPC**. Formalmente, a linguagem é a mesma: um conjunto de variáveis proposicionais e os operadores $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$ e $\leftrightarrow$. Além disso, vimos que todas as fórmulas válidas em $\mathbf{Ł}_3$ são tautologias do **CPC**. O contrário, claro, não vale: há tautologias que não são válidas em $\mathbf{Ł}_3$, por exemplo, $p \vee \neg p$. Nesse caso, seria o **CPC** uma extensão de $\mathbf{Ł}_3$? Recorde que havíamos classificado $\mathbf{Ł}_3$ como uma lógica heterodoxa, ou rival da lógica clássica. Se formos considerar o **CPC** como uma lógica ampliada, em relação a $\mathbf{Ł}_3$, talvez tivéssemos que considerá-la uma lógica alternativa em relação a uma lógica do tempo como $\mathbf{K}_t$.

Isso não parece fazer muito sentido. Afinal, qual a diferença entre o **CPC** e $\mathbf{K}_t$? Ora, as *linguagens* diferem; $\mathbf{K}_t$ tem operadores que o **CPC** não tem. O que não é o caso comparando-se o **CPC** e $\mathbf{Ł}_3$; *a linguagem, formalmente, é a mesma*.

Mas aqui uma outra questão surge: ainda que ambas as lógicas tenham tipograficamente o mesmo conjunto de operadores, será que o significado dos operadores é o mesmo? Será que, ao afirmar que $p \vee \neg p$ é válida, o **CPC** está dizendo a mesma coisa que $\mathbf{Ł}_3$ quando esta lógica afirma que $p \vee \neg p$ não é válida?

Para deixar isso claro: ambas as lógicas usam os símbolos $\neg$ e $\vee$. Contudo, o que representam esses símbolos? No **CPC**, $\neg$ representa uma função de verdade bivalente; em $\mathbf{Ł}_3$, $\neg$ representa uma função de verdade trivalente — funções que são dadas, respectivamente, pelas tabela a seguir:

	$\neg$
V	**F**
F	**V**

	$\neg$
V	**F**
I	**I**
F	**V**

E as mesmas considerações valem para o símbolo $\vee$. Neste sentido, se $\neg$ e $\vee$ representam funções diferentes nas duas lógicas (significam coisas diferentes), como podemos dizer que as lógicas são alternativas, que estão em conflito? Seria a mesma coisa que ocorre quando duas pessoas afirmam cada uma o seguinte:

(1) Maria é velha.
(2) Maria não é velha.

Sendo que a primeira entende 'velha' por 'tem mais de 30 anos', ao passo que a segunda entende 'velha' por 'tem mais de 60 anos'. O conflito é apenas verbal, é um conflito aparente. O mesmo ocorre se alguém afirmar que Sócrates era um filósofo grego, e outra pessoa negar isso, dizendo que Sócrates era um jogador de futebol brasileiro. No caso, a palavra 'Sócrates' estaria se referindo a dois indivíduos diferentes.

A crítica, então, é que os símbolos $\neg$ e $\vee$ não estão representando a mesma coisa nas duas lógicas: há apenas um conflito verbal entre elas.

A questão de dizer se duas lógicas são realmente alternativas, ou se uma é extensão da outra, fica ainda um pouco mais complicada. Consideremos um outro exemplo, que você já conhece do último capítulo da *Introdução à lógica*, as *lógicas modais*. O primeiro sistema contemporâneo de lógica modal foi apresentado por seu autor, C. I. Lewis, como uma lógica alternativa. A motivação era o descontentamento com certas propriedades da implicação material da lógica clássica, os chamados "paradoxos da implicação", que são os seguintes:

$$
\begin{gathered}
p \to (q \to p) \\
\neg p \to (p \to q) \\
(p \to q) \vee (q \to p)
\end{gathered}
$$

Se formos ler o operador $\to$ como implicação, temos algumas consequências estranhas. A primeira das fórmulas acima diz então que uma proposição verdadeira é implicada por qualquer proposição; a segunda, que uma proposição falsa implica qualquer proposição; e a terceira, que, dadas duas proposições quaisquer, a primeira implica a segunda, ou a segunda implica a primeira. Isso não corresponde à nossa ideia intuitiva do que seja uma implicação.

A sugestão de Lewis era apresentar um sistema de lógica com uma implicação mais forte, que fosse uma implicação de verdade: a *implicação estrita*. Assim, ele apresentou um primeiro sistema de lógica modal (mais tarde chamado de **S3**) cuja linguagem continha, além das variáveis proposicionais, os operadores clássicos $\neg$, $\wedge$ e $\vee$, e um novo operador de implicação, $\multimap$, para a implicação estrita. Esse novo operador não é uma função de verdade. Intuitivamente, dizemos que $p \multimap q$ se, e somente se, é impossível que p seja verdadeira e q seja falsa.

Lewis apresentou seu sistema axiomaticamente. Não vou listar os axiomas aqui, mas o resultado é um sistema de lógica que pareceria ser uma alternativa à lógica clássica. Com essa nova implicação, por exemplo, não temos os paradoxos da implicação material.

Contudo, as coisas não são tão simples. Note que no sistema de Lewis temos os operadores clássicos $\neg$, $\wedge$ e $\vee$. Assim, mesmo que $\rightarrow$ não seja um operador primitivo do sistema, poderíamos introduzi-lo, bem como o operador $\leftrightarrow$, como operadores definidos. Assim:

$$\begin{aligned} \alpha \rightarrow \beta \quad &=_{\text{df}} \quad \neg(\alpha \wedge \neg\beta), \\ \alpha \leftrightarrow \beta \quad &=_{\text{df}} \quad (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha). \end{aligned}$$

Mas então temos como teoremas do sistema (ou como fórmulas válidas) todas as tautologias do **CPC**! Assim, o que parecia ser uma lógica alternativa pode ser considerado (e hoje o é) como uma *extensão* da lógica clássica.

A pergunta que fica é: teríamos uma situação análoga no caso das lógicas polivalentes? Recordemos os conetivos externos definidos em no sistema $\mathbf{B}_3^{\mathrm{E}}$ de Bochvar: através desses conetivos, verificamos que o sistema, de certa forma, *estende* o **CPC**.

A questão das lógicas alternativas, então, é um tanto complicada. Talvez possamos resolvê-la dizendo que há, na verdade, uma coisa que é a negação: e se o **CPC** e **Ł**$_3$ atribuem coisas diferentes a esse operador de negação, uma delas deve estar errada — ou ambas. Isso nos leva a nosso próximo tópico.

4.3 Há uma lógica correta?

Suponhamos, então, que estejamos reconhecendo ou classificando dois ou mais sistemas de lógica como alternativas legítimas. Como, então, escolher entre eles? Como dizer que algum deles é melhor que os demais? Há algum deles que seja a verdadeira lógica? Há apenas um sistema lógico correto, ou pode haver vários sistemas que sejam igualmente corretos?

A pergunta de se um sistema de lógico é correto envolve a questão adicional: correto em relação *a quê*?

Ora, qual o objetivo de um sistema de lógica? Diríamos que é o de formalizar padrões de raciocínio/inferência considerados válidos informalmente. Isto é, temos primeiro uma noção de validade que é pré-teórica, externa a um sistema de lógica — *validade extrassistemática*, para utilizar a expressão da filósofa Susan Haack (ver Haack 2002, cap. 12). Assim, se um sistema de lógica captura adequadamente inferências que são extrassistematicamente válidas, dizemos que ele é correto.

Contudo, o que é um argumento intuitivamente válido? Em que se baseia essa noção pré-teórica? A respeito disso temos dois pontos de vista bastante conhecidos: o *psicologista* e o *platonista*.

Para o *psicologismo*, a lógica é um empreendimento descritivo. A tarefa da lógica é formular uma teoria do raciocínio — teoria de como as pessoas fazem raciocínios bem sucedidos (isto é, sem cair em confusão ou erro). Nesse caso, a lógica é uma disciplina empírica: um lógico estuda os processos de raciocínio realmente observados de algum grupo de pessoas inteligentes. Assim, a questão da lógica correta é uma questão empírica: sistemas que conflitam devem estar representando inadequadamente os raciocínios reais.

Tal versão de psicologismo é denominada por S. Haack de *psicologismo forte*, e parece ter sido defendida por Kant. Há também uma versão *fraca* do psicologismo, que diz que a lógica não é descritiva, mas é *prescritiva* em relação a processos mentais (ou seja, ela nos diz como nós *deveríamos* pensar). (O filósofo americano C. S. Peirce parece ter defendido uma posição assim.) É claro que, se deveríamos raciocinar de tal ou qual modo, isso pressupõe que há uma maneira correta de fazê-lo — o que parece pressupor um reino abstrato de entidades, o que nos leva à posição seguinte.

Para o *platonismo*, por outro lado, a lógica também é descritiva, mas não das práticas de raciocínio humanas e sim da geografia de um reino abstrato de conceitos. Há um reino de entidades lógicas (como proposições abstratas) e o objetivo da lógica é estudar as interrelações entre tais entidades: que proposições são universalmente verdadeiras, que proposições se seguem, ou são consequência, de quais outras proposições, e assim por diante. Os princípios da lógica são verdades universais a respeito de um setor (abstrato) da realidade.

Psicologismo e platonismo são absolutistas e (aparentemente) monistas: há uma única lógica correta. Mas é claro que poderíamos ter uma versão *pluralista*, a de que vários sistemas lógicos são, parcialmente, corretos. Por exemplo, o **CPC** estaria correto, mas não é suficiente, precisamos estender a linguagem com alguma outra coisa, etc.

Havendo uma noção de correção para lógicas, a questão é saber qual, dentre todas as lógicas, é a correta — e mais ainda, como sabê-lo. No caso do psicologismo forte, parece mais fácil obter uma resposta, uma vez que podemos observar certos grupos de pessoas, ver como raciocinam e registrar os padrões de raciocínio empregados. Isso evidentemente é mais fácil do que ter acesso a um reino abstrato de proposições — entidades rejeitadas por alguns filósofos (por exemplo, Quine), devido a seu caráter obscuro.

Contudo, a posição psicologista na lógica sofreu críticas devastadoras desde Frege, e hoje em dia praticamente ninguém defenderia tal posição. O argumento básico de Frege é de que a lógica é *objetiva* e *pública*, ao passo que processos mentais, por sua natureza, são subjetivos, são privados. Portanto, lógica não tem nada a ver com processos mentais.[1]

[1]Se você estudou um pouco de Filosofia da Linguagem, deve ter encontrado a distinção

Mas talvez não estejamos satisfeitos com nenhuma dessas posições, psicologismo ou platonismo, pois não vemos a lógica como uma ciência empírica, ou não queremos postular um reino abstrato de entidades causalmente inatingíveis.

Ou devemos tomar uma perspectiva pragmática e perguntar qual sistema é mais eficiente para propósitos específicos? Por exemplo, temos a física newtoniana e a física relativista. Para construir um edifício, não é necessário levar em conta fenômenos explicados pela teoria da relatividade. Mas não podemos ignorá-los se estivermos projetando um sistema de satélites para GPS, em virtude das altas velocidades envolvidas. Talvez a coisa fosse similar com respeito a lógicas. Usamos a geometria de Euclides para regiões pequenas do espaço, mas talvez precisemos da de Riemann se consideramos regiões bem maiores do universo.

Uma outra saída, então, é a posição instrumentalista. Para o *instrumentalismo*, a tarefa do lógico é construir sistemas codificando possíveis instrumentos da raciocínio, que ficam disponíveis para quem os queira usar. Lógicas são ferramentas, como martelos ou chaves de fenda. Não há a questão de uma lógica correta: algumas são mais apropriadas para utilizar em certos contextos do que outras. Por exemplo: na lógica clássica vale o seguinte padrão de inferência:

$$p, \neg p \vDash q,$$

ou seja, se tivermos uma contradição (tanto p quanto $\neg p$), qualquer coisa (qualquer proposição q) é consequência lógica isso. Ou seja, a presença de uma contradição trivializa um sistema: tudo vale.

Assim, talvez não possamos utilizar a lógica clássica em todas as situações. Se estivermos lidando com raciocínio a respeito de algum enorme banco de dados, o qual recebe informações de várias pessoas diferentes, talvez seja mais adequado utilizar uma *lógica paraconsistente*, para a qual a presença de alguma contradição não trivializa o sistema, já que uma pessoa pode inserir uma informação no sistema (por exemplo, que você é casado) e outra uma informação contradizendo isso (que você é solteiro). Assim, se o sistema conclui que você é e não é casado, pode imediatamente concluir que você fraudou o imposto de renda em um milhão de reais, e tomar as providências cabíveis.

Usando uma lógica paraconsistente, tal coisa não ocorreria.

Como outro exemplo, algumas lógicas polivalentes foram também sugeridas como a melhor maneira de raciocinar sobre certos fenômenos da mecânica quântica. Parece que a seguinte equivalência,

$$\big(p \wedge (q \vee r)\big) \leftrightarrow \big((p \wedge q) \vee (p \wedge r)\big),$$

distinção fregueana entre *sentido* e *referência*, e sua argumentação de que o sentido de uma expressão não é uma entidade mental, mas algo objetivo. No caso de uma sentença, *Gedanke* — literalmente, pensamento, mas correspondendo à nossa ideia de uma proposição.

uma das leis de distributividade da lógica clássica, não deveria valer. Já que, por exemplo, embora possamos determinar a posição de uma partícula em certo instante, ou sua velocidade nesse instante, não podemos fazer as duas coisas. Certas “anomalias” quânticas, assim, seriam resolvidas trocando-se de lógica. No contexto da microfísica, uma lógica polivalente (ou algum outro tipo de *lógica quântica*) seria a ferramenta mais adequada.

A posição instrumentalista, segundo N. Rescher (ver 1969, cap. 4), divide-se ainda em dois polos: um polo *formalista*, segundo o qual a construção de sistemas lógicos é um exercício livre em engenhosidade criativa, e um polo *pragmatista*, que dá ênfase ao uso eficiente ou conveniência de alguns sistemas em detrimento de outros. Que um sistema seja usado em vez de outro quer dizer simplesmente que o primeiro é um instrumento melhor.

O instrumentalismo é uma posição, nesse sentido, pluralista, ao contrário do monismo do psicologismo e platonismo.

A versão formalista do instrumentalismo pareceria ser a solução fácil para as questões levantadas neste capítulo: todos os sistemas são igualmente aceitáveis como lógicas, a escolha entre eles seria completamente indiferente. Mas se a escolha é indiferente, se não há uma lógica correta mesmo, se a escolha é arbitrária, não nos arriscamos a cair numa antilógica? Digamos que tivéssemos uma lógica segundo a qual o seguinte padrão de inferência é válido:

$$p \vDash p \wedge q.$$

Será que diríamos que tal sistema formal é mesmo uma lógica? Intuitivamente, parece não podermos aceitar que, da verdade de p, possamos inferir a verdade de $p \wedge q$. Mas isso, claro, já nos coloca outra vez na posição de presumir que padrões de inferência devem pelo menos preservar a verdade e que há uma noção extrassistemática da validade de argumentos.

Como você vê, há muitas questões interessantes — e muito mais do que o que tratamos aqui — mas não temos, ainda, uma resposta definitiva para elas.

Leituras recomendadas

Para questões filosóficas sobre a lógica, um ótimo texto em português é o livro *Filosofia das lógicas*, de Susan Haack (ver 2002), particularmente o cap. 12. Você ainda pode ler com proveito a *Filosofia da lógica* de W. Quine (ver seu 1972). Em inglês, o cap. 4 de Rescher 1969 também discute tais questões. E há um ótimo livro, bem recente, de J. P. Burgess (2009), sobre sistemas de lógica não clássica.

Reflita sobre

- O que caracteriza um sistema formal como uma lógica?
- Faz sentido em falar da correção de uma lógica?
- Se há uma ideia de correção lógica, pode haver mais de uma lógica correta?
- Como poderíamos saber se uma lógica, afinal, é correta?
- Como evitar um relativismo total no que diz respeito aos sistemas de lógica?

Bibliografia

Burgess, J. P. (2002) Basic Tense Logic. In D. Gabbay & F. Guenthner (eds.) *Handbook of Philosophical Logic*, 2a ed., vol. 7, p. 1–42.

———. (2009) *Philosophical Logic*. Princeton, Oxford: Princeton University Press.

Cocchiarella, N. (1966) *Tense Logic: A Study in the Topology of Time*. (Tese de doutorado, University of California at Los Angeles.)

Haack, S. (2002) *Filosofia das lógicas*. São Paulo: Editora Unesp.

Hughes, G. E. & Cresswell, M. J. (1996) *A New Introduction to Modal Logic*. London, New York: Routledge.

Kleene, S. C. (1938) On a Notation for Ordinal Numbers. *Journal of Symbolic Logic* **3**: 150–5.

———. (1952) *Introduction to Metamathematics*. New York, Toronto: D. Van Nostrand.

Lacey, H. M. (1972) *A linguagem do espaço e do tempo*. São Paulo: Perspectiva.

Łukasiewicz, J. (1967) On Determinism. In S. McCall (ed.) *Polish Logic: 1920–1930*. Oxford: Clarendon Press, p. 19–39.

McArthur, R. P. (1976) *Tense Logic*. Dordrecht: D. Reidel.

Mendelson, E. (1979) *Introduction to Mathematical Logic*. New York: D. Van Nostrand.

Plantinga, A. (1974) *The Nature of Necessity*. Oxford: Clarendon Press.

Prior, A. N. (1967) *Past, Present and Future*. Oxford: Clarendon Press.

Quine, W. V. O. (1972) *Filosofia da lógica*. Rio de Janeiro: Zahar.

Rescher, N. (1969) *Many-Valued Logic*. New York: McGraw-Hill.

Rescher, N. & Urquhart, A. (1971) *Temporal Logic*. New York: Springer Verlag.

Urquhart, A. (2002) Basic Many-valued Logic. In D. Gabbay & F. Guenthner (eds.) *Handbook of Philosophical Logic*, 2a ed., vol. 2, p. 249–96.