Universidade Federal de Santa Catarina,
UFSC

Departamento de Matemática, UFSC
Curso de Especialização em Matemática
Modalidade à Distância

GUIA DE ESTUDOS

Disciplina: Análise

Professor: Eliezer Batista

Universidade Federal de Santa Catarina
Departamento de Matemática
Campus Universitário, Trindade,
CEP: 88 040-900, Florianópolis, SC

Apresentação

Desde o surgimento do Cálculo diferencial e integral no final do século XVII, houve uma preocupação com o rigor matemático das construções que envolviam processos de limites. O próprio Isaac Newton, que divide o título de um dos criadores do Cálculo com o alemão Gottfried Leiniz, publicou sua obra prima, o "Principia Mathematica" utilizando como padrão de rigor a geometria Grega. Mesmo os resultados propriamente de Cálculo estão apresentados sob a forma de teoremas envolvendo semelhanças e congruências entre figuras geométricas e demonstrados dentro do mais puro espírito dos "Elementos" de Euclides. Mesmo assim, não faltaram críticas aos métodos utilizados dentro desta nova "área" da Matemática.

A primeira crítica contundente ao Cálculo infinitesimal deve-se ao Bispo anglicano George Berkeley, contemporâneo de Newton, na obra entitulada "O Analista". O principal problema era com a definição dos "incrementos infinitesimais", que eram utilizados para se calcular a taxa de variação instantânea, ou fluxão (que hoje em dia denominamos derivada de uma função). A questão era, se os incrementos são nulos, então não poderiam ser usados no cálculo (pois implicaria em uma divisão por zero), se, por outro lado, não fossem nulos, não podriam ser desprezados após calcular-se o quociente. Para exemplificarmos, consideremos a função[1] $f(x) = x^2$. Para calcularmos a taxa de variação no ponto $x = a$, adicionamos um incremento $\dot{x}$ e calculamos o valor da função em $a + \dot{x}$, o que resulta em

$$(a + \dot{x})^2 = a^2 + 2a\dot{x} + \dot{x}^2.$$

A seguir, subtraímos o valor da função no ponto a, ou seja subtraímos a^2, restando $2a\dot{x} + \dot{x}^2$. Finalmente, dividimos este resultado por $\dot{x}$, o que resulta em $2a + \dot{x}$ e "desprezamos" os termos que contém algum fator $\dot{x}$ como se

[1] Estamos aqui cometendo um anacronismo, pois mesmo o conceito de função não era utilizado na época

fossem nulos, ou seja, o rsultado final seria $2a$. Mas note que fizemos duas operações matemáticas incompatíveis: por um lado, efetuamos a divisão por um número, e por outro, dizemos que este número é igual a zero.

Muito embora aparecessem problemas conceituais profundos, o Cálculo infinitesimal se mostrou uma ferramenta extremamente útil na resolução de problemas matemáticos e acabou sofrendo um desenvolvimento vertiginoso no século XVIII, principalmente pelas mãos de Euler e da família Bernoulli. Ao problema dos incrementos infinitesimais se juntaram outras dificuldades conceituais como a manipulação de séries infinitas. Um clássico exemplo é devido ao próprio Euler: considere a soma infinita alternada

$$1-1+1-1+1-1+1-1+\cdots.$$

Por um lado, podemos associar os termos da seguinte forma:

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots=0.$$

Por outro lado, podemos associar os termos da forma

$$1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\cdots=1.$$

Ou ainda, chamando de S esta soma, temos

$$S=1-1+1-1+1-1+1-1+\cdots=1-(1-1+1-1+1-1+\cdots)=1-S$$

Portanto $S=1-S$ o que resulta em $S=\frac{1}{2}$. O mundo da Matemática precisaria ainda esperar até meados do século XIX para ver solucionados estes problemas de forma definitiva.

A análise matemática, como a conhecemos hoje em dia, teve seu início com o matemático francês Augustin Louis Cauchy. Foi com Cauchy que a noção de limite de funções foi devidamente estabelecida. O limite de uma função[2] $f=f(x)$ quando x tende a um valor a, se existir, consiste em um número L, ao redor do qual estão todos os valores de $f(x)$ quando os valores de x estão suficientemente próximos de x. Ou seja, para qualqeur número positivo ε, vai existir um outro número positivo δ tal que sempre que $a-\delta<x<a$ ou $a<x<a+\delta$ tenhamos $L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon$. Note

[2]Mais uma vez, lembramos que função nos tempos de Cauchy ainda era uma “regra” qua a cada número x associava um outro número $f(x)$, a noção de conjunto, produto cartesiano, relação e função só veio a ser estabelecida com a criação da teoria dos conjuntos por Georg Cantor, no final do século XIX.

que excluimos o número a pois pode ser que o valor $f(a)$ seja diferente de L, ou ainda pode ocorrer que a função não esteja definida em $x = a$. A noção de proximidade na reta real veio a trazer grandes avanços no estudo do que hoje denominamos topologia.

De qualquer forma, ainda faltava ser dada uma última palavra sobre a estrutura dos números reais para que se pudesse garantir que as operações de limite do cálculo estavam bem definidas. Nesta história, despontam nomes como Karl Wierstrass, Richard Dedekind e o próprio Georg Cantor. Assim todos os processos de limite envolvidos no cálculo são decorrências diretas da estrutura do corpo ordenado completo dos números reais. Isto se chama aritmetização da Análise, que é a maneira padrão de aprendermos Análise matemática nos dias atuais.

O objetivo desta disciplina de introdução à Análise é desenvolvermos os conceitos básicos sobre a estrutura topológica do conjunto dos números reais. Também pretendemos tratar de uma maneira rigorosa a convergência de seqüências numéricas, os limites de funções e a continuidade de funções de uma variável real. O formalismo a ser introduzido, permitirá a compreensão plena dos processos de limite envolvidos no cálculo de funções reais de uma variável. Visamos que o estudante, ao final da disciplina saiba elaborar as demonstrações dos principais teoremas bem como saiba dar contra exemplos para o caso de resultados que não são válidos em geral.

Devemos salientar, primeiramente, que a Análise matemática depende fortemente da linguagem da teoria dos conjuntos. Muito embora nosso primeiro tópico de estudo será uma breve revisão dos conteúdos relativos à linguagem de conjuntos, é impotante que o estudante adquira uma familiaridade com este tipo de lingugem de uma maneira que transcenda o material que será abordado nesta disciplina. A linguagem de conjuntos está subjacente a quase toda a Matemática, portanto é necessário que todo aquele que queira estudar Matemática seriamente tenha uma relativa fluência com os termos e notações utilizados.

Plano de Ensino

Disciplina: Introdução à Análise.
Carga Horária: 90 horas
Professor: Eliezer Batista.
Pré Requisitos: Cálculo de uma variável real.
Semestre: 2008-2.

Ementa: Conjuntos e funções. Conjuntos finitos, infinitos e enumeráveis. O corpo, ordenado e completo dos números reais. Seqüências de números reais. Topologia da reta. Limites de funções. Funções contínuas.

Objetivos Gerais

1) Desenvolver no estudante a capacidade de raciocínio abstrato.

2) Desenvolver no estudante técnicas de demonstração matemática.

3) Aprimorar no estudante sua independência de pensamento.

4) Permitir que o estudante realize pesquisa bibliográfica.

5) Aprimorar a escrita matemática dos estudantes.

Objetivos Específicos

1) Desenvolver no estudante a habilidade de trabalhar com a linguagem da teoria de conjuntos.

2) Apresentar ao estudante as propriedades do corpo ordenado completo dos números reais.

3) Permitir com que o estudante domine os conceitos de limites de seqüências e de funções.

4) Propiciar ao estudante a familiaridade coma manipulação de séries numéricas.

5) Apresentar aos estudantes os conceitos topológicos básicos, através do estudo da reta real.

Conteúdo Programático

1- Conjuntos e Funções
1.1- Conjuntos, união, intersecção, complementar.
1.2- Produto cartesiano, relações, funções.
1.3- Funções: Domínio, contra-domínio, imagem, imagem inversa.
1.4- Funções injetivas, sobrejetivas, bijetivas, função inversa.
1.4- Funções reais, funções pares ímpares, monótonas, etc.

2- Conjuntos finitos, infinitos e enumeráveis.
2.1- Os números naturais, axiomas de Peano.
2.2- Conjuntos finitos.
2.3- Conjuntos infinitos.
2.4- Conjuntos enumeráveis, $\mathbb{Q}$ é enumerável.
2.5- Um exemplo de conjunto não enumerável.

3- O corpo, ordenado e completo dos números reais.
3.1- $\mathbb{R}$ é um corpo.
3.2- $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado.
3.3- $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo.
3.4- Breve discussão sobre a construção de $\mathbb{R}$ a partir de $\mathbb{Q}$.

4- Seqüências de números reais.
4.1- Seqüências numéricas, subseqüências.
4.2- O conceito de limite de uma seqüência.
4.3- Seqüências limitadas, monótonas e de Cauchy.
4.4- Operações com limites.

4.5- Limites infinitos.

5- Topologia da reta
5.1- Conjuntos abertos e fechados.
5.2- Pontos aderentes e pontos de acumulação.
5.3- Fecho de um conjunto e conjuntos fechados.
5.4- Conjuntos compactos.
5.5- Teorema de Borel Lebesgue, teorema de Bolzano Weierstrass.
5.6- O conjunto de Cantor.

6- Limites de funções
6.1- Definição de limite de funções. Propriedades.
6.2- Relação com o limite de seqüências numéricas.
6.3- Limites laterais.
6.4- Limites no infinito, limites infinitos, expressões indeterminadas.

7- Funções contínuas
7.1- Continuidade de funções reais.
7.2- Operações com funções contínuas.
7.3- Teorema do valor intermediário.
7.4- Continuidade em intervalos e em compactos.
7.6- Continuidade uniforme.

Metodologia

A disciplina será baseada em estudo individual e dirigido. A bibliografia básica será composta de dois livros texto:

[1] Ávila, Geraldo: "Análise Matemática para Licenciatura", Terceira edição revista e ampliada Ed. Edgard Blücher (2006).

[2] Lima, Elon L.: "Análise Real", Vol 1, Coleção Matemática Universitária, IMPA (2006).

Ao longo do semestre serão feitas video-conferências semanais, todas as quintas feiras das 18:30 às 20:10, relativas aos conteúdos da disciplina. Também haverá atendimento on-line, a partir da UFSC, de um tutor da disciplina, que responderá às dúvidas dos alunos nos horários programados.

Avaliação

Serão feitas duas provas presenciais ao longo do semestre e serão entregues duas tarefas. A média final será dada calculando-se a média aritmética simples entre as notas das duas provas e das duas tarefas. Será aprovado o aluno que obtiver nota maior ou igual a 6,0. Por se tratar de um curso de especialização, esta disciplina não possui a previsão de prova de recuperação.

Cronograma

Video conferências:

1. Dia 4 de março de 2010: Revisão dos conceitos básicos de conjuntos e funções. Para esta video conferência, o aluno terá que ter lido o capítulo 1 e as seguintes seções do capítulo 2 do livro do Geraldo Ávila: Noções sobre conjuntos (págs 29 a 32) e tentado fazer os exercícios da página 32. também tentaremos já nesta primeira vídeo relembrar os conceitos básicos de função. Para isto, também o aluno terá que ter lido a parte do capítulo 6 do Ávila da página 133 até a página 140.

2. Dia 11 de março de 2010: Conjuntos e funções II. Seção 2.2 do Ávila, páginas 29 a 32. Seção 6.1 do Ávila, páginas 133 a 140.

3. Dia 18 de março de 2010: Conjuntos finitos, infinitos e enumeráveis. Capítulo 1 do Elon e páginas 32 a 45 do Ávila.

4. Dia 25 de março de 2010: O corpo ordenado completo dos Reais. Capítulo 2 do Elon e páginas 57 a 67 do Ávila.

5. Dia 1 de abril de 2010: Seqüências de números reais. Capítulo 3 do Elon, e capítulo 4 do Ávila.

6. Dia 8 de abril de 2010: Seqüências de números reais II. Capítulo 3 do Elon, e capítulo 4 do Ávila.

7. Dia 15 de abril de 2010: Revisão para a primeira prova.

8. Dia 29 de abril de 2010: Topologia da reta. Capítulo 5 do Elon.

9. Dia 6 de maio de 2010: Topologia da reta II. Capítulo 5 do Elon.
10. Dia 13 de maio de 2010: Topologia da reta III. Capítulo 5 do Elon.
11. Dia 20 de maio de 2010: Limites de funções. Capítulo 6 do Elon e páginas 140 a 154 do Ávila.
12. Dia 27 de maio de 2010: Funções contínuas. Capítulo 7 do Elon e páginas 154 a 174 do Ávila.
13. Dia 10 de junho de 2010: Funções contínuasII. Capítulo 7 do Elon e páginas 154 a 174 do Ávila.
14. Dia 17 de junho de 2010: Funções contínuasIII. Capítulo 7 do Elon e páginas 154 a 174 do Ávila.
15. Dia 24 de junho de 2010: Revisão para a segunda prova.

Observação: Em cada uma das video conferências haverá espaço para tirar dúvidas de tópicos passados, ou de exercícios. Tentaremos expor nas videos as idéias principais, os resultados principais e um esboço de demonstração dos teoremas mais importantes, mas, é claro, o trabalho duro de demonstrar teorema por teorema, em todos os detalhes, será de cada estudante no seu estudo individual.

Provas e tarefas:

1. Dia 22 de abril de 2010: Data limite para a entrega da primeira tarefa.
2. Dia 22 de abril de 2010: Prova 1, com o conteúdo incluindo seqüências de números reais.
3. Dia 1 de julho de 2010: Data limite para a entrega da segunda tarefa.
4. Dia 1 de julho de 2010: Prova 2, com todo o restante do conteúdo.

Guia das Referências Bibliograficas

Como já foi mencionado, nossa bibliografia básica para esta disciplina consistirá de apenas dois livros, que estarão disponíveis para os estudantes nos pólos:

[1] Ávila, Geraldo: "Análise Matemática para Licenciatura", Terceira Edição Revista e Ampliada, Ed. Edgard Blücher (2006).

[2] Lima, Elon L.: "Análise Real", Vol 1, Coleção Matemática Universitária, IMPA (2006).

Seguiremos mais de perto o livro do Elon, por conter capítulos mais curtos, por mostrar os resultados de forma mais exata e organizado e por se preocupar com o rigor matemático exigido para o estudo da análise. Este livro é uma versão abreviada do livro do mesmo autor entitulado: "Curso de Análise, Volume 1", da coleção Projeto Euclides, também do IMPA. O "Curso de Análise, Volume 1" é, na minha opinião, o melhor livro de matemática já escrito em língua portuguesa. Trás detalhadamente os conteúdos que serão abordados nesta disciplina e muito mais, com as demonstrações matemáticas dos teoremas expostas de uma maneira elegante e uma variedade de contra exemplos, explicitando a necessidade das hipóteses de cada teorema. Os livros do Prof. Elon bem como diversos outros livros de Matemática tanto de nível superior quanto de nível de ensino médio podem ser encomendados na SBM (Sociedade Brasileira de Matemática), pela página.

http://www.sbm.org.br

O livro do Geraldo Ávila, foi feito pensando-se em um curso introdutório de análise para alunos de licenciatura em matemática, portanto possui uma apresentação mais elementar, muitas vezes as demonstrações são simplificadas, escondendo algumas sutilezas que ocorrem quando analisamos com cuidado e rigor. Também o autor se preocupa em dar muitos exemplos numéricos e ficar em casos particulares, evitando generalizações e abstrações sempre que possível. Obviamente, esta pode ser uma boa estratégia quando se pretende apresentar pela primeira vez os conceitos de análise a um aluno de licenciatura, mas certamente, poderia se ir um pouquinho mais longe em termos de abstrações. A grande vantagem do livro do Ávila é a riqueza de comentários de caráter histórico, mostrando muitas vezes o que os matemáticos ao longo dos séculos desenvolveram e como isto se encaixa no estudo do assunto específico abordado naquele determinado capítulo do livro. Todas as leituras dos comentários históricos do professor Ávila são recomendadas aos alunos desta disciplina.

Algumas páginas em português na internet também trazem o tema análise real, veja por exemplo:

http://pt.wikipedia.org/wiki/An%C3%A1lise_real

http://pt.wikipedia.org/wiki/T%C3%B3picos_em_an%C3%A1lise_real

http://www.lncc.br/∼ alm/cursos/analiseI06/analiseI.pdf

Este terceiro, é realmente muito interessante, pois trata-se de uma apostila de análise, em português, disponível para download. Para os que sabem se virar com a língua inglesa, temos mais algumas sugestões, como:

http://web01.shu.edu/projects/reals/reals.html

http://en.wikipedia.org/wiki/Real_analysis

http://www.math.unl.edu/ webnotes/contents/chapters.htm

http://www-groups.mcs.st-andrews.ac.uk/ john/analysis/index.html

Ao longo do semestre, aconselhamos aos estudantes que procurem mais material de apoio pela internet. Atualmente o mundo está dentro de nossas casas e podemos acessar quase que instantaneamente coisas que há alguns anos eram impensáveis.

Vamos tentar fazer um apanhado geral da literatura tendo em vista o programa da disciplina que temos a cumprir. Conforme você deve ter notado pelo cronograma das video-conferências o prazo de leitura de cada um dos capítulos é de duas semanas, em média. Também você deve ter notado que o programa desta disciplina não corresponde à totalidade do conteúdo de nenhum dos dois livros texto utilizados. Deixamos de lado os capítulos 7,8 e 9 do livro do Ávila e os capítulos de 8 a 12 do livro do Elon puramente por uma questão de tempo. Seria necessária uma disciplina com no mínimo 6 horas aula semanais para que se cobrisse todo o programa destes livros. De qualquer maneira, consideramos que os estudantes sejam capazes de efetuar uma leitura individual e completa de cada um destes livros após o término desta disciplina.

Neste pequeno resumo que se segue, vamos explicitar o que há de mais importante, capítulo por capítulo e quais os exercícios que são mais interessantes de serem feitos. Faremos tópico por tópico para ficar mais fácil de você se localizar.

Conjuntos e Funções

Semanas de 1 a 14 de março de 2010
Video-conferências de 4 e 11 de março de 2010.

Para o primeiro tópico do programa, realmente existe nos dois livros disponíveis para a disciplina, pouco conteúdo a respeito. O Livro do Ávila faz no capítulo 1 sobre preliminares de lógica, que aconselho a todos que leiam, pois tem algumas informações relevantes sobre como demonstrar teoremas e o significado das demonstrações matemáticas. Mas é no capítulo 2 daquele livro que o autor trata de forma muito breve sobre a questão de conjuntos. Este assunto é discutido a partir da página 29 do livro. Ele faz exemplos específicos e logo após apresenta o que ele denomina "propriedades gerais" que são igualdades entre conjuntos. Aqui vai um comentário importante:

Para se provar que dois conjuntos A e B são iguais, temos que tomar um elemento $x \in A$ e mostrarmos que $x \in B$ e vice versa, isto é, tomamos um elemento arbitrário $y \in B$ e mostramos que $y \in A$.

Aconselho fortemente que você faça todos os exercícios das páginas 31 e 32 (exercícios de 1 a 12).

Um tópico não abordado no livro do Ávila é o produto cartesiano entre dois conjuntos A e B, definido como o conjunto

$$A \times B = \{(a, b)|\ a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

O produto cartesiano é fundamental quando se quer definir o que é uma função.

O conceito de função somente é abordado no livro do Ávila no início do capítulo 6, página 133. Após uma rápida abordagem histórica, na definição 6.1 o autor define função como uma "lei" que associa a cada elemento de um conjunto um único elemento de um outro. Uma forma mais precisa de definirmos função é através de relações. Uma relação de um conjunto A em um conjunto B é, basicamente, um sub-conjunto qualquer do produto cartesiano $A \times B$. Uma função f, pode ser definida como um tipo de relação, que no texto aparece com o nome de "gráfico" da função, definido da seguinte maneira:

Definição: *Uma função $f : A \to B$ é uma relação na qual todo elemento do conjunto A figura em um único par ordenado.*

Em outras palavras, temos duas condições essenciais:

- Para qualquer $a \in A$, existe um par ordenado (a, b) na relação.
- Se (a, b_1) e (a, b_2) pertencem à relação, então $b_1 = b_2$.

A este único elemento $b \in B$ tal que (a, b) pertença à relação denominamos $f(a)$ ou seja o valor da função f no elemento a. Também denotamos

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \to & B. \\ & a & \mapsto & f(a) \end{array}$$

É importante não confundir a função em si com o valor da função em um determinado elemento do domínio. Muito embora utilizemos abusos de linguagem como "seja a função $f(x)$" ou "seja a função $f = f(x)$", estas frases não devem ser tomadas como corretas, devemos ter sempre em mente que elas são apenas abreviações para uma idéia muito mais precisa que o que elas veiculam.

Um conceito que você deve prestar bastante atenção é no conceito de imagem inversa (pág 138 do Ávila). Não confundir com função inversa, um erro bastante comum entre estudantes. Também é bom relembrar os conceitos de função injetiva (ou injetora) e sobrejetiva (ou sobrejetora) e mostrar a seguinte propriedade:

Teorema: *Uma função $f : A \rightarrow B$ é bijetiva, se, e somente se, existir uma função inversa, isto é uma função $f^{-1} : B \rightarrow A$ tal que $f \circ f^{-1} = Id_B$ e $f^{-1} \circ f = Id_A$.*

Os exercícios 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14 e 15 das páginas 138 e 139 devem ser feitos.

Conjuntos Finitos, Infinitos e Enumeráveis

Semana de 15 a 21 de março de 2010
Video-conferência de 18 de março de 2010

Esta unidade está baseada no capítulo 1 do livro do Elon e nas páginas 32 a 45 do livro do Ávila. A primeira coisa a se notar é que o Elon formula os axiomas de Peano a partir do número 1, enquanto a maioria dos autores formula os mesmos axiomas a partir do número 0, que é mais "natural" para definir a operação soma nos naturais como tendo elemento neutro aditivo. A formulação dos axiomas de Peano a partir do 0 fica:

1. Existe um conjunto não vazio $\mathbb{N}$ e uma função injetiva $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, denominada "sucessor".

2. Existe um único elemento $0 \in \mathbb{N}$, tal que $0 \neq s(n)$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

3. Se um subconjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ é tal que $0 \in A$ e $s(A) \subseteq A$ (isto é, se $n \in A$ então $s(n) \in A$), então $A = \mathbb{N}$.

Tente formular como seriam os axiomas para a soma e para a multiplicação nos naturais com os axiomas de Peano a partir do 0.

Tente demonstrar algumas propriedades da soma e da multiplicação em $\mathbb{N}$ com o uso do terceiro axioma de Peano (indução).

Prete atenção à relação de ordem em $\mathbb{N}$. E observe que o axioma 3 de Peano é equivalente ao Princípio da Boa Ordem:

Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ possui um menor elemento.

O livro não atenta para este fato, mas realmente são quatro as proposições equivalentes em $\mathbb{N}$:

- **Axioma 3 de Peano:** Se um subconjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ é tal que $0 \in A$ e $s(A) \subseteq A$ (isto é, se $n \in A$ então $s(n) \in A$), então $A = \mathbb{N}$.
- **Princípio da Boa Ordem:** Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ possui um menor elemento.
- **Primeiro Princípio de Indução:** Se $A(n)$ é uma afirmação para cada número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que:

  a) $A(0)$ é verdadeira.

  b) Sempre que $a(n)$ for verdadeira, tivermos que $a(s(n))$ também é verdadeira.

  Então $A(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Segundo Princípio de Indução:** Se $A(n)$ é uma afirmação para cada número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que:

  a) $A(0)$ é verdadeira.

  b) Sempre que $a(k)$ for verdadeira para todo $0 \leq k \leq n$, tivermos que $a(s(n))$ também é verdadeira.

  Então $A(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Tente entender cada uma das formulações, busque exemplos em outros livros de como se utiliza cada um desses princípios para demonstrar teoremas e tente mostrar que, de fato eles são princípios equivalentes.

Os princípios de indução também podem ser formulados a partir de um número natural n_0 arbitrário. Escreva estas formulações e mostre que elas decorrem inteiramente dos princípios de indução a partir do 0.

Leia os teoremas sobre conjuntos finitos, infinitos e enumeráveis do texto do Elon. Leia atentamente os exemplos de que $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ são enumeráveis e compare com a exposição feita no livro do Ávila. Do livro do Ávila, leia a argumentação de por que os números reais não são enumeráveis.

Faça os exercícios; 1,2,4 e 5 da seção 1 (página 9), 1,2 e 3 da seção 2 (página 9), 1 e 3 da seção 3 (página 10) e 1,5 e 6 da seção 4 (página 10), do capítulo 1 do livro do Elon. Faça também os exercícios 2,4,5,8,9 e 10 da página 37 do livro do Ávila.

Por fim, leia as notas históricas do livro do Ávila das páginas 38 a 45. Estas notas históricas estão realmente muito interessantes, pois discutem algumas idéias de Georg Cantor, que foi o fundador da teoria dos conjuntos e o primeiro a demonstrar que existem infinitos de diferentes ordens. Também são discutidos alguns paradoxos que surgiram no início da teoria dos conjuntos. Este é uma leitura altamente recomendada para todos que desejam ter uma visão geral do processo de construção dos conceitos matemáticos.

O Corpo, Ordenado e Completo dos Números Reais

Semana de 22 a 28 de março de 2010
Video-conferência de 25 de março de 2010

Esta unidade está baseada no capítulo 2 do livro do Elon e nos capítulos 2 e 3 do livro do Ávila. Para um aquecimento, inicie sua leitura pelas páginas de 23 a 29 do livro do Ávila e faça os exercícios 1,5,9,18,21,23,24 e 25 das páginas 26 e 27 deste livro. Depois, leia no mesmo livro das páginas 46 a 57 do livro do Ávila e faça os exercícios 3, 4 e 5 da página 55 (leia atentamente as dicas de solução oferecidas pelo autor.

Bem, agora vá para o livro do Elon e leia o texto do capítulo 2. Dê atenção para a desigualdade de Bernoulli (página 14) que será muito útil em muitas demonstrações. Tamem é importante o teorema 3 (página 17) sobre a propriedade arquimediana de $\mathbb{R}$. Na verdade, um corpo ordenado não precisa ser completo para ser arquimediano, por exemplo $\mathbb{Q}$ é arquimediano. Mas todo corpo ordenado e completo tem que ser arquimediano.

A completude do corpo ordnado dos números reais pode ser formulada de quatro maneiras diferentes, porém equivalentes:

- **Princípio do Supremo:** Todo sub conjunto não vazio de $\mathbb{R}$ limitado superiormente possui um supremo.

- **Princípio dos Intervalos Encaixantes:** (Teorema 4, página 17 do Elon) Dada uma seqüência decrescente $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq \cdots$ de intervalos limitados e fechados $I_n = [a_n b_n]$, existe pelo menos um número real c tal que $c \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- **Princípio do Corte de Dedekind:** Sejam dois sub-conjuntos não vazios $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tais que

  a) $A \cup B = \mathbb{R}$

  b) Para todo $a \in A$ e todo $b \in B$ temos que $a < b$.

  Então existe um único número $x \in \mathbb{R}$ que é o máximo de A ou o mínimo de B, mas não simultaneamente os dois.

- **Princípio de Cauchy:** Toda seqüência de Cauchy em $\mathbb{R}$ é convergente.

No livro do Elon, você verá que o princípio básico será o do supremo que guiará todos os outros, já no livro do Ávila (leia as páginas 57 a 67 daquele livro) utilizará como princípio básico o dos cortes. Na minha opinião, o mais intuitivo e que permite deduzir resultados de maneira mais simples e elegante é o princípio dos intervalos encaixantes. Você deve ter notado também que o último princípio foge um pouco do escopo deste capítulo, nós retornaremos a ele no capítulo de seqüências, mas é esta caracterização de completude que permite generalizações para outros contextos, como espaços métricos em geral. Assumindo qualquer um destes princípios como postulado, podemos deduzir todos os outros com relativa facilidade, no entanto, sem considerarmos a construção dos números reais a partir dos números racionais não temos como deduzir os quatro de primeiros princípios, sempre um deles teria que ser dado apriori.

A construção dos números reais é umas das peças de engenhosidade da matemática moderna. Existem duas construções equivalentes dos números reais a partir do corpo ordenado dos números racionais. A primeira construção é feita considerando-se cortes de Dedekind em $\mathbb{Q}$, isto é, um par de sub-conjuntos não vazios $A, B \subseteq \mathbb{Q}$ tais que

a) $A \cup B = \mathbb{Q}$

b) Para todo $a \in A$ e todo $b \in B$ temos que $a < b$.

A diferença de $\mathbb{Q}$ para $\mathbb{R}$ é que nos racionais pode não haver um elemento que fique exatamente no meio, como mínimo de B ou máximo de A. Por exemplo

$$\begin{aligned} A &= \mathbb{Q}^- \cup \{x \in \mathbb{Q}^+ | x^2 < 2\}, \\ B &= \{x \in \mathbb{Q}^+ | x^2 > 2\}. \end{aligned}$$

É óbvio que A e B satisfazem o ítem b), e como sabemos que não há número racional tal que $x^2 = 2$ então A e B também satisfazem o ítem a). Nos exercícios 4 e 5 da página 55 do Ávila você mostrou que A não tem máximo e B não tem mínimo. Logo há um "buraco" entre os dois. Para se definir os reais toma-se o conjunto de todos os cortes de Dedekind em $\mathbb{Q}$, define-se operações de soma e multiplicação entre eles e mostra-se que este conjunto é um corpo, também define-se uma relação de ordem entre os cortes e mostra-se que o conjunto dos cortes é um corpo ordenado. Por fim, mostra-se que este corpo ordenado satisfaz o princípio dos cortes de Dedekind.

A segunda construção dos reais é baseada em seqüências de Cauchy de racionais, a soma e a multiplicação de duas seqüências são dadas, respectivamente, pela soma e multiplicação entrada a entrada. Define-se uma relação de equivalência entre sequencias de Cauchy dizendo-se que duas delas são equivalentes se, e somente se a diferença entre elas for uma seqüência que converge para 0. O conjunto quociente por esta relação de equivalência é um corpo ordenado completo. Toda esta nomenclatura, somente ficará esclarecida a partir da unidade seguinte sobre Seqüências.

Finalmente podemos perguntar, será que o conjunto dos números reais é o único corpo ordenado completo que existe, ou será que existem outros com estas mesmas propriedades?

Suponha que existam dois corpos ordenados e completos, K e L.

1. Mostre que tanto K como L possuem $\mathbb{Q}$ como sub-corpos.

2. Considere uma aplicação $f : K \to L$ que satisfaça $f(a+b) = f(a)+f(b)$ e $f(ab) = f(a)f(b)$ (isto é um homomorfismo de corpos). Mostre que f só pode ser nula ou injetiva.

3. Mostre que a função f definida no ítem anterior, quando restrita ao sub corpo dos racionais, é a função identidade.

4. Com isto mostre que f tem que ser a identidade. E portanto, só pode existir um corpo ordenado completo, que é o conjunto dos números reais.

Faça os exercícios 1,2,3 e 4 da seção 1 (página 19), 2,3,4,6 e 7 da seção 2 (página 20) e 1,2,3 da seção 3 (página 20) do capítulo 2 do livro do Elon e os exercícios 4, 9,11,12, 14, 15, 18 e 19 (página 65) do livro do Ávila. Por fim, leia as notas históricas do livro do Ávila para o capítulo 3, páginas 69 a 71.

Seqüências de Números Reais

Semanas de 29 de março a 11 de abril de 2010
Video-conferências de 1 e 8 de abril de 2010

Esta unidade está baseada no capítulo 3 do livro do Elon e no capítulo 4 do livro do Ávila. Para início, recomenda-se a leitura do livro do Ávila da página 72 até o início da página 78 do mesmo. Os exemplos deste texto são factíveis e devem ser acompanhados com atenção. Depois, retome a leitura do Elon da página 22 até a 25 e vá comparando passo a passo deste ponto em diante a leitura do Ávila desde o final da página 78 até o final da página 82 e da 85 até o início da 86 com a leitura do Elon da página 25 até o início da página 29.

Faça os exercícios 3,4,5,6,9,12,14,16,17 e 18 das páginas 82 e 83 do livro do Ávila. Faça também os exercícios 1,4,6 e 7 da seção 1 (página 33) 1,2,4,6 e 7 da seção 2 (páginas 33 e 34) do livro do Elon, note que o exercício 7 da seção 2 trás a definição de seqüência de Cauchy. O ítem c) pede para mostrar que uma seqüência é convergente se e somente se for de Cauchy. É fácil mostrar que toda seqüência convergente é de Cauchy (truque do $\varepsilon/2$) mas o fato de uma seqüência de Cauchy convergir, esta depende da completude dos reais (de fato, como vimos, é uma condição equivalente da completude dos reais). Leia para acompanhar as páginas 97 a 99 do Ávila, enquanto estiver fazendo este exercício. Faça também os exercícios 1,3 e 5 da seção 3 (páginas 34 e 35 do livro do Elon. Note que este último exercício do livro do Elon tras uma situação corriqueira em seqüências fazendo o limite estar entre duas subseqüências, uma monótona decrescente e outra monótona crescente, isto é uma aplicação do princípio dos intervalos encaixantes.

A seguir, leia com atenção as páginas 86 e 87 do livro do Ávila e os exemplos das páginas 29 e 30 do livro do Elon, em especial compare os exemplos 12 e 13 com a leitura do livro do Ávila. O número e é definido de duas formas diferentes como seqüências infinitas, as duas são garantidamente convergentes devido à monotonicidade e pelo fato de serem limitadas superiormente. O grande problema é provar que as duas seqüências convergem para o mesmo número, e isto é feito mostrando-se que para todo elemento da primeira seqüência existe um elemento da segunda que é maior que ele e todo elemento da segunda seqüência existe um elemento da primeira que é maior que ele. esta é uma idéia muito utilizada ao se trabalhar com seqüências monótonas.

Prossiga na leitura do capítulo 4 do Ávila com a leitura sobre limites infinitos e seqüências recorrentes, páginas 88 a 93. Termine também a leitura do capítulo 3 do Elon da página 31 até a página 33.

Em seguida, faça os exercícios 3 e 4 da seção 4 (página 35) do livro do Elon e os exercícios 1,5,18,21 e 22 das páginas 92 e 93 do livro do Ávila.

Por último, leia as páginas 96 e 97 do livro do Ávila sobre o teorema de Bolzano Weierstrass. Leia também o teorema 4 e seu corolário na página 25 do livro do Elon (também sobre o teorema de Bolzano Weierstrass). Voltaremos com mais detalhes a este teorema no capítulo sobre a topologia da reta. Por hora,note apenas a diferença de tática na demonstração do mesmo teorema. Em comparação, o método da bissecção utilizado pelo Ávila é muito mais geral e serve para a demonstração de diversos resultados, tanto na reta como em espaços $\mathbb{R}^n$. Este método da bissecção apóia-se grandemente na completude da reta real. finalmente, leia da páginas 101 até a página 105 do livro do Ávila, com valiosíssimas notas de interesse histórico.

Semana de 12 a 21 de abril de 2010
Video-conferência de 15 de abril de 2010
Prova 1 e entrega de tarefas no dia 22 de abril de 2010

Nestas semanas, revise o conteúdo aprendido e tire suas dúvidas na video conferência. Dê uma revisada no capítulo de conjuntos e funções e no capítulo de conjuntos finitos, infinitos e enumeráveis. Dedique, também o seu tempo ao estudo e revisão do corpo ordenado completo dos reais e seqüências de números reais.

Topologia da Reta

Semanas de 26 de abril a 16 de maio de 2010
Video-conferências de 29 de abril e 6 e 13 de maio de 2010

Esta unidade será central no curso de Análise. Ao lado do capítulo de funções contínuas, este capítulo é o que contem maior quantidade de conceitos novos para o estudante. Os resultados descritos aqui poderão facilmente ser transpostos para contextos mais amplos como espaços euclidianos n dimensionais e espaços métricos em geral. Toda esta unidade será baseada no capítulo 5 do livro do Elon. Inicie com os conceitos de conjuntos abertos e fechados, pontos aderentes, fecho e pontos de acumulação. É importantíssimo que você saiba distinguir os conceitos de ponto aderente e de ponto de acumulação, todo ponto de acumulação é aderente mas nem todo ponto aderente é ponto de acumulação. Também é importante ver as diversas caracterizações de aberto e de fechado e a relação de complementaridade que existe entre estes dois tipos de conjunto. Estes conceitos aparecem da página 48 até a página 53.

Ainda na página 51 aparece o conceito de cisão, que leva à definição de conjunto conexo (que não é dada no texto do livro:

Definição: *Um sub-conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ é dito ser conexo se somente admitir cisão trivial.*

A própria reta real e todos os segmentos de reta são conjuntos conexos.

Na página 53, o teorema 7 é uma versão do teorema de Bolzano Weierstrass, que já foi visto para seqüências. O teorema de Bolzano-Weierstrass é um dos principais teoremas topológicos de espaços euclidianos e vale não só na reta, mas em qualquer $\mathbb{R}^n$.

Em seguida, na página 53, comece a leitura sobre conjuntos compactos. A definição de compacto como limitado e fechado só é exata em espaços euclidianos de dimensão finita (onde se possa demonstrar o teorema de Borel-Lebesgue).

Definição: *Um conjunto K é dito ser compacto quando toda cobertura de abertos admitir uma sub-cobertura finita.*

Um conjunto compacto sempre é limitado e fechado. Mas sub-conjuntos limitados e fechados nem sempre são compactos (se você tomar um sub-conjunto de um espaço de dimensão infinita).

Finalmente, a partir da página 55, temos uma apresentação do conjunto de Cantor que é um conjunto compacto, onde todos os seus pontos são pontos de acumulação, que possui interior não vazio e é não enumerável. esta é uma das construções mais belas de toda a matemática.

Faça os exercícios 1, 3, 4 e 6 da seção 1, 1, 2, 4 e 6 da seção 2, 1, 2 e 4 da seção 3, 2, 5 e 6 da seção 4 e 2, 3 e 4 da seção 5 do livro do Elon.

Limites de Funções

Semana de 17 a 23 de maio de 2010
Video-conferência de 20 de maio de 2010

Esta unidade será baseada no capítulo 6 do livro do Elon e no capítulo 6 do livro do Ávila. Inicie sua leitura da página 140 até a página 144 do livro do Ávila. Acompanhe com a leitura da página 61 até a página 66 do livro do Elon. Os resultados principais desta seção são os teoremas da unicidade do limite, teorema do sandwich (também conhecido como teorema do confronto, que você já deve ter visto em Cálculo) e as proprie dades aritméticas do limite. Um outro resultado resultado particularmente importante é o que relaciona limites de funções com limites de seqüências (teorema 3 do livro do Elon e teorema 6.10 do livro do Ávila). Observe também o exemplo 2 na página 65 do livro do Elon. a função $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ serve de contra exemplo em muitos contextos diferentes do Cálculo e da Análise Matemática. Aproveite para fazer os exercícios 9, 10, 14 e 15 das páginas 148 e 149 do Ávila e 2, 4 e 5 da seção 1 (página 71) do Elon.

Continue com a leitura dos limites laterais, limites no infinito e limites infinitos da página 151 até a página 154 do livro do Ávila e da página 66 até a página71 do livro do Elon. Faça os exercícios 7, 10, 11, 12 e 14 da página 159 do livro do Ávila e os exercícios 1, 3 e 4 da seção 2 e o exercício 2 da seção 3 da página 72 do livro do Elon.

Funções Contínuas

Semanas de 24 de maio a 20 de junho de 2010
Video-conferências de 27 de maio e 10 e 17 de junho de 2010

Esta última unidade é baseada na leitura do capítulo 7 do livro do Elon e no capítulo 6 do livro do Ávila. A Topologia basicamente é o estudo das propriedades dos espaços que são invariantes mediante transformações contínuas. Portanto funções contínuas, de certa forma dão vida à Análise e à Topologia.

Inicie sua leitura pelo livro do Elon, da página 73 à página 76, basicamente, as demonstrações das propriedades de continuidade são análogas às demonstrações de propriedades de limites. Neste ponto faça os exercícios 4, 5, 6, 7, 13, 19 e 20 da página 149 do livro do Ávila (você deve ter notado que o livro do Ávila introduz limites de funções e funções contínuas no mesmo capítulo). Faça também os exercícios 2, 3, 5, 6 e 7 da seção 1 (páginas 85 e 86) do livro do Elon.

Leia também da página 155 até a página 158 do livro do Ávila sobre a caracterização das descontinuidades de uma função.

A seção 2 do livro do Elon contém um dos resultados mais úteis em todo o Cálculo, que é o teorema do valor intermediário. Como conseqüências deste teorema podemos concluir que a imagem por uma função contínua de um intervalo é um intervalo, ou mais geral, a imagem de um conjunto conexo por uma função contínua é um conjunto conexo. Também alguns resultados decorrentes deste teorema são mostrados nos exercícios como a existência de raiz real para todo polinõmio de grau ímpar, a existência de raiz n-ésima para todo número real positivo, o teorema do ponto fixo de Brouwer. Leia também as páginas 161 e 162 do livro do Ávila sobre o mesmo assunto e faça os exercícios 2, 4 e 5 da seção 2 do livro do Elon e os exercícios 2, 8 e 9 da página 166 do livro do Ávila.

A seção 3 do livro do Elon trás outro resultado fortíssimo, que dis que toda função contínua em um intervalo fechado é limitada e atinge um valor máximo e um valor mínimo. mais geralmetne, podemos dizer que a imagem de um conjunto compacto por uma função contínua é um conjunto compacto. Como conseqüência disto é que toda bijeção contínua $f : X \subseteq \mathbb{R} \to Y \subseteq \mathbb{R}$ com X compacto possui inversa contínua, isto é é um homeomorfismo. Leia também as páginas de 163 a 165 do livro do Ávila sobre o mesmo assunto. Aproveite para fazer os exercícios 1, 4 e 5 da seção 3 (páginas 86 e 87 do Elon) e compare o exercício 1 com o exercício 4 da página 166 do Ávila. Faça também os exercícios 14, 15, 16 e 18 da página 167 do livro do Ávila.

A seção 4 do livro do Elon trata de um último grande teorema sobre funções contínuas em intervalos reais: Toda função contínua em um intervalo fechado é uniformemente contínua. Podemos ampliar este resultado dizendo que toda função contínua cujo domínio é um conjunto compacto é uniformemente contínua. A seção começa com o conceito de continuidade uniforme (que não é abordada no livro do Ávila). Faça os exercícios 1, 3 e 5 da seção 4 do livro do Elon.

Enfim, você viu os seguintes resultados de funções contínuas nesta unidade:

1. A imagem inversa de um aberto por funções contínuas é um aberto (o que não implica que uma função contínua leva aberto em aberto).

2. A imagem inversa de um fechado por funções contínuas é um fechado (o que não implica que uma função contínua leva aberto em aberto).

3. Funções contínuas levam limites em limites, pontos de acumulação em pontos de acumulação.

4. Funções contínuas levam conexos em conexos.

5. Funções contínuas levam compactos em compactos.

6. Funções contínuas definidas em compactos são uniformemente contínuas.

Para finalizar leia as notas históricas do professor Ávila, da página 168 até a página 174, que comentam sobre o início do rigor na Análise matemática.

Semanas de 21 a 30 de junho de 2010
Video conferência de 24 de junho de 2010
Prova 2 e Entrega da segunda tarefa em 1 de julho de 2010

É época de fazer revisão geral para a segunda prova. Estude principalmente os capítulos de topologia da reta e funções contínuas, não esquecendo, é claro de dar uma olhadinha no capítulo de limites de funções reais.

Conclusão

Ao final desta disciplina, esperamos que o aluno tenha conhecimento dos conceitos básicos de topologia e saiba os principais resultados da análise real sobre seqüências, séries e funções contínuas. Obviamente, isto é só o começo, mas certamente depois deste curso, esperamos que o estudante seja capaz de estudar sozinho outros tópicos mais avançados. temos um semestre para atingirmos estes objetivos. Coragem, força e determinação serão extremamente nacessárias para este empreendimento. Bons estudos.

Bibliografia

[1] Ávila, Geraldo: "Análise Matemática para Licenciatura", Terceira Edição Revista e Ampliada, Ed. Edgard Blücher (2006).

[2] Courant, Richard and John, Fritz: "Introduction to Calculus and Analysis", Springer-Verlag (1989).

[3] Lima, Elon L.: "Curso de Análise, Volume 1", Projeto Euclides, IMPA (1995).

[4] Lima, Elon L.: "Análise Real", Vol 1, Coleção Matemática Universitária, IMPA (2006).

[5] Spivak, Michael: "Calculus", 3rd Edition, Publish or Perish (1994).